LA RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE
(vers 520 av. J.C)

Par Roger LAUSSEUR 2006

Le théorème de Pythagore part de 3 nombres x, y z donnés et se concrétise par la relation : $x^2 + y^2 = z^2$

La réciproque part de la relation : $x^2 + y^2 = z^2$ pour aboutir à un trio x, y, z, qui satisfasse à la relation.

Les recherches dans le domaine quantitatif n'étant pas satisfaisantes, il restait, encore à côté de ce domaine quantitatif, à explorer le domaine qualitatif en utilisant la notion de Parité.

C'est ainsi qu'en 2006 se posa la question de savoir comment la parité jouait au sein du trio x, y, z, demande désintéressée, car on ne voyait pas ce qu'une notion uniquement qualitative pourrait apporter dans une recherche quantitative à propos d'un nombre. A ce stade, il n'y avait plus qu'à s'en remettre à la formule de Guillaume d'Orange :

« Point n'est besoin d'espérer pour entreprendre ou de réussir pour persévérer »

Or, la suite montra que la décision d'étudier la parité de x, y, z, ouvrait la porte sur le chemin qui menait à la solution de la réciprocité, ce qui n'était nullement apparent.

REFLEXION PREALABLE

Les nombres de même nature doivent obligatoirement être premiers entre eux (exemple : les 3 côtés x, y, z) pour éviter d'inutiles redondances. La solution finale, complète, devra être obtenue uniquement par filiation depuis la relation $x^2+y^2= z^2$, sans emprunt à d'autre(s) théorie(s).

La recherche au niveau de l'équation ne débouche sur rien. La seule possibilité restante consiste à descendre au niveau du nombre considéré sous ses deux caractéristique : sa valeur numérique et sa nature.

La valeur numérique ne mène à rien, alors que la nature du nombre peut être particularisée par le critère de parité, seul petit pas possible à ce stade.

I <u>Etude de la parité des nombres x, y, z</u>

Les nombres x, y, z étant premiers entre eux, il s'ensuit que leurs carrés x^2, y^2, z^2 sont également premiers entre eux.

Or, pour les nombres : 2n, 2n + 1
les carrés sont : $4n^2$, $4n^2 + 4n + 1$
ou $4^{(*)}$, $4^{(*)}+ 1$ avec la notation : $4^{(*)}$ = multiple de 4

La somme x^2+y^2 peut-elle être égale à $4^{(*)}+4^{(*)}= 4^{(*)}$? Non, car 4 serait un diviseur commun à x, y, et z.

Peut-elle être égale à $(4^{(*)}+1) + (4^{(*)}+1) = 4^{(*)} +2$? Non, car ce n'est pas une forme de carré pour z^2.

Cela implique que x^2 et y^2 sont l'un $4^{(*)}$ et l'autre $4^{(*)} +1$.

Soit donc, x2 = 4(*) +1, d'où **y pair** et **z impair.**

II Etude de y (seul pair des trois)

L'équation peut s'écrire[1] : $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x) (z + x)$
Puisque x et z sont impairs, les facteurs (z – x) et (z + x) sont pairs, ils définissent les entiers positifs *d* et *s*, tels que :

$$\begin{cases} 2s = z + x \\ 2d = z - x \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = s - d \\ z = s + d \end{cases}$$

En outre, *s* et *d* sont de parité différente puisque x et z sont impairs. Ils sont aussi premiers entre eux puisque x et z le sont.
L'équation devient : $y^2 = 4sd$, et, puisque *s* et *d* sont premiers entre eux, *s* et *d* sont des carrés qui définissent les entiers *S* et *D*, eux-mêmes premiers entre eux, tels que :

$$\begin{cases} S^2 = s \\ D^2 = d \end{cases}$$

Comme ils sont de parité différente (avec *s* et *d*), l'un est $4^{(*)}$, d'où $y^2 = 4S^2D^2$
et $y = 2S\,D = 4^{(*)}$, puisque *S* et *D* sont de parité différente.
Il s'ensuit que pour tout nombre « y » multiple de 4, toute paire d'entiers $S > D$ premiers entre eux, de parité différente, et tels que $SD = y/2$, *définit les deux nombres impairs* :

$$\begin{cases} z = S^2 + D^2 \\ x = S^2 - D^2 \end{cases}$$

De plus, *S* et *D* étant de parité différente :
$z = S^2 + D^2 = 4^{(*)} + (4^{(*)} + 1) = 4^{(*)} + 1$

$$x = S^2 - D^2 \quad \begin{cases} 4^{(*)} - (4^{(*)} + 1) = 4^{(*)} - 1 \\ \text{ou} \\ (4^{(*)} + 1) - 4^{(*)} = 4^{(*)} + 1 \end{cases} = 2^{(*)} + 1$$

Donc : $z = 4^{(*)} + 1$ et x = impair quelconque.

Remarque. *d*, demi-différence des deux impairs z et x, ne peut être nulle. Sa plus petite valeur est 2, correspondant à $d = D - 1$ et $S = y/2$, d'où la solution qui existe toujours :

$$\begin{cases} z = (y/2)^2 + 1 \\ x = z - 2 = (y/2)^2 - 1 \end{cases}$$

Il y a donc toujours au moins une solution pour $y = 4^{(*)}$.

Exemples.
1) y = 4 = valeur minimale de y :
alors $SD = y/2 = 2$, d'où la seule paire possible

{ $D = 1$ → { $z = 5$
{ $S = 2$ → { $x = 3$
qui sont les valeurs minimales pour z et x.

2) y = 12, alors y/2 = 6 x 1 = 3 + 2.

Première paire :

$$\begin{cases} D = 1 \\ S = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 6^2 + 1^2 = 37 \\ x = 6^2 - 1^2 = 35 \end{cases} \quad \textit{soit : } 35^2 + 12^2 = 37^2$$

Deuxième paire :

$$\begin{cases} D = 2 \\ S = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 3^2 + 2^2 = 13 \\ x = 3^2 - 2^2 = 5 \end{cases} \quad \text{soit : } 5^2 + 12^2 = 13^2 .$$

III <u>Etude de x (à l'imitation de y)</u>

L'équation peut s'écrire :

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Puisque z et y sont premiers entre eux, les facteurs (z – y) et (z + y) sont également premiers entre eux et, comme leur produit est égal à un carré, ils sont eux-mêmes des carrés. Ils définissent des carrés $X^2 > Y^2$ tels que $X^2 = z + y$ et $Y^2 = z - y$, et l'équation devient :
$x^2 = X^2 Y^2$, d'où $x = X Y$.

Il s'ensuit que pour tout nombre x impair, toute paire d'entiers $X > Y$ impairs et premiers entre eux, et tels que $X Y = x$, définit les deux nombres :

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{2} = 4^{(*)} + 1 \\ x = \dfrac{x^2 - y^2}{2} = 4^{(*)} \end{cases}$$

Remarque. Y^2, différence des nombres z et y de parité différente, ne peut être nulle. Sa plus petite valeur est 1. Alors, $Y = 1$, $z = y + 1$, $x = X$ et l'équation se réduit à $x^2 = z + y$, d'où la solution qui existe toujours :

$z = ½ (x^2 + 1)$ qui est la majorité absolue de x^2,

$y = ½ (x^2 - 1) = z - 1$.
Il y a donc toujours une solution pour x impair > 1.

Exemple 1. x = 3 = valeur minimale de x. Alors, $XY = 3$: il n'y a qu'une paire

$$\begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Exemple 2. $X = 15 = 15 \times 1 = 5 \times 3$:

Première paire :

$$\begin{cases} X = 15 \\ Y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = ½\,(15^2 + 1^2) = 113 \\ y = z - 1 = 112 \end{cases}$$

soit : $15^2 + 112^2 = 113^2$

Deuxième paire :

$$\begin{cases} X = 5 \\ Y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = ½\,(5^2 + 3^2) = 17 \\ y = ½\,(5^2 - 3^2) = 8 \end{cases}$$

soit : $15^2 + 8^2 = 17^2$

IV Etude de z

Les deux études précédentes (cas x et cas y) ont déjà fourni des résultats supplémentaires, relatifs à z :

- z est la somme de deux carrés de parités différentes (exemple m^2 et n^2).

De ce fait, z est multiple de 4+1 : condition nécessaire mais non suffisante : exemples

$5=1^2 + 2^2$ = multiple de 4 + 1	) à contrario certains multiples de 4 +1 ne
$13=2^2 + 3^2=$ -°-	) conviennent pas :
$17= 1^2 + 4^2=$ -°-	) 9, 21, 33, etc…

En outre, les couples m, n des deux cas sont évidemment différents pour un même triangle, étant donné les conditions de leur provenance : mais bien entendu, les résultats étant relatifs à un même triangle, sont concordants, comme on le vérifie avec le théorème de Lagrange sur l'interchangeabilité de deux paires d'éléments.

Cas du Périmètre P.
Le périmètre est traité de la même façon que chacun des 3 côtés. Il ne nécessite qu'une légère modification d'une formule utilisée pour « y ».

Mise en œuvre : le Mémento, ***ci-après en annexe***, fournit les explications nécessaires aux quelques opérations simples dans chacun des cas.

MEMENTO : $x^2 + y^2 = z^2$ avec une donnée M

(voir étude in extenso dans la revue « Quadrature » N°61 Juil/Sept 2006)

<u>Cas x= M impair</u>

Pour toute paire m,n (premiers entre eux) telle que M= m.n,

La réponse : y et $z = \dfrac{m^2 (+ \text{ ou } -) n^2}{2}$ soit $y = \dfrac{m^2-n^2}{2}$ et $z = \dfrac{m^2+n^2}{2}$

<u>Cas y= M multiple de 4</u>

Pour toute paire m,n (premiers entre eux) telle que $m.n = \dfrac{M}{2}$

La réponse : $x = m^2 - n^2$ et $z = m^2 + n^2$

<u>Cas z=M</u>

Il faut que M soit la somme de deux carrés,
$M = m^2 + n^2$

La réponse : $x = m^2 - n^2$ et $y = 2m.n$

<u>Cas du Périmètre</u> P = 2p=M :

p, pair entraînant M pair,
et, pour toute paire m,n (premiers entre eux et de parités différentes) et telle que m>n

$p = \dfrac{P}{2} = m(m+n) = \dfrac{M}{2}$

La réponse est : $2mn$
$m^2 + n^2$
$m^2 - n^2$