Les tableaux de Biya en mathématiques

Raoul Hekeu

Calculer la probabilité de réunions et d'intersections d'événements, tous les élèves de lycée général l'ont à leur programme. L'utilisation de schémas pour éclaircir les situations est fréquente : tableaux ou arbres, diagrammes de Venn. Mais comment fait-on lorsque les événements ne sont plus 2, ni 3, mais plutôt 4, 5 ou plus ? Voici une idée qui nous vient du Cameroun.

En hommage à mon père, Monsieur BIYA.

Raoul Hekeu est étudiant à l'université de Yaoundé 1 au Cameroun.

Introduction

Le Cameroun est un pays qui a deux systèmes éducatifs : le système anglophone et le système francophone. L'objet de cet article, l'enseignement de la notion d'intersection d'ensembles, correspond aux classes de seconde (form five) dans le système anglophone et pour le système francophone aux classes de première de toutes les spécialités. En fonction de la spécialité, les exigences sont différentes, mais cette notion reste à acquérir dans toutes les classes de première, L (littérature) ou S (scientifique). Cette notion d'intersection s'inscrit dans le cadre de la théorie des ensembles élaborée pour la première fois en 1880 par Cantor.

Même si la notion d'intersection n'est qu'une petite partie d'une théorie très importante, elle est utile dans tous les domaines des mathématiques : analyse, probabilités, algèbre, géométrie. De nombreux autres mathématiciens et logiciens ont contribué à sa compréhension et son extension. Le cas du logicien John Venn, avec son célèbre diagramme élaboré en 1881 est d'un intérêt tout particulier, puisqu'il tente d'illustrer et de représenter la notion d'intersection en utilisant des diagrammes.

Ces représentations, très utiles pour deux ou trois ensembles se révèlent bien complexes pour plus de trois ensembles, comme Venn le confesse avec regret ; dans *Symbolic logic*, il propose des schématisations utilisant des ellipses pour illustrer les intersections d'un plus grand nombre d'ensembles, cependant ces représentations restent délicates à manipuler.

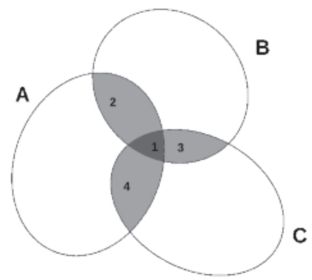


Diagramme de Venn pour 3 ensembles

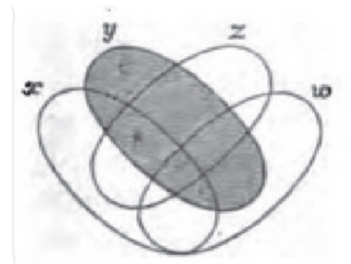


Diagramme de Venn pour 4 ensembles

Notre objet est de généraliser le raisonnement du diagramme de Venn de manière simple et claire. Pour ce faire, il s'agit de définir tout d'abord les « Tableaux de Biya », d'en montrer la construction et de donner quelques applications en analyse combinatoire.

Près d'un siècle après les travaux de John Venn, le généticien, statisticien et évolutionniste britannique A.W.F. Edwards publia dans son livre intitulé *Cogwheels of the Mind* une représentation acceptable de toutes les intersections au delà du cadre habituel de trois ensembles. Cette représentation n'est cependant pas enseignée dans les programmes scolaires de mathématiques au lycée du fait de la complexité des dessins.

Définition du tableau de Biya

Le tableau de Biya est la représentation de toutes les intersections d'un nombre fini d'ensembles.

Prenons l'exemple de l'intersection de trois ensembles A, B et C :

A	×	×		×
B	×	×	×	
C	×		×	×
	$A\cap B\cap C$	$A\cap B$	$B\cap C$	$A\cap C$

Figure 3 : le tableau de Biya pour trois ensembles.

Le nombre de lignes d'un tableau de Biya concernant n ensembles est bien sûr de n. Le nombre de colonnes est $2^n - n - 1$; en effet, il s'agit de dénombrer les combinaisons de n, n – 1,..., 2 éléments parmi n, c'est-à-dire de calculer : $\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}$.

On fait en effet le choix de ne représenter ni l'univers entier, ni chacun des n ensembles. Ainsi pour quatre ensembles, le tableau comptera 16 – 4 – 1 = 11 colonnes :

A	×	×		×	×	×			×	×	
B	×	×	×	×		×	×				×
C	×	×	×		×		×	×	×		
D	×		×	×	×			×		×	×
	$A\cap B\cap C\cap D$	$A\cap B\cap C$	$B\cap C\cap D$	$A\cap B\cap D$	$A\cap C\cap D$	$A\cap B$	$B\cap C$	$C\cap D$	$A\cap C$	$A\cap D$	$B\cap D$

Applications du tableau de Biya

Application 1

Pour un tableau à cinq ensembles, prévoir à l'avance le nombre de colonnes correspondant à l'intersection de k ensembles est bien sûr important pour ne pas oublier de cas. Ce nombre est celui des combinaisons de k parmi n : $\binom{n}{k}$.

Le travail demandé pourrait donc être la construction de ce tableau avec une réflexion sur la généralisation à n ensembles.

Application 2

Intéressons-nous dans un premier temps à l'exercice ci-dessous qui ne met en jeu que trois ensembles. Il peut donc se résoudre à l'aide d'un diagramme de Venn mais nous utiliserons ici un tableau de Biya. Cela nous permettra d'illustrer comment mettre en œuvre un tel tableau.

Dans un lycée comportant 2400 élèves, on effectue une enquête où l'on dénombre :
1260 élèves qui étudient l'anglais,
500 élèves qui étudient l'italien,
353 élèves qui étudient l'espagnol.
Par ailleurs, on sait que :
210 élèves étudient à la fois l'anglais et l'italien,
164 élèves étudient à la fois l'anglais et l'espagnol,
139 élèves étudient à la fois l'italien et l'espagnol,
25 élèves étudient à la fois l'anglais, l'italien et l'espagnol.

Représenter cette situation.

Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement chaque langue.

Déterminer le nombre d'élèves qui n'étudient aucune des trois langues.

Solution

Dans le tableau de Biya (bas de page), il faut bien distinguer les effectifs de la première ligne de ceux de la dernière ligne. Si on regarde la troisième colonne :

- sur la première ligne on inscrit le nombre d'éléments de $A \cap E \cap \overline{I}$ qui représente le nombre d'élèves qui font exclusivement Anglais et Espagnol c'est-à-dire anglais (A) et espagnol (E) mais pas italien ($\overline{I}$).

- sur la dernière ligne, on note le nombre d'éléments de $A \cap E$ qui représente le nombre d'élèves qui font anglais et espagnol avec ou sans italien.

Construisons-le pas à pas :

Une fois les quatre intersections identifiées, on place les données de l'énoncé qui correspondent à la première ou à la dernière ligne (nombres en gras).

La première colonne correspond aux élèves apprenant les trois langues : il y en a 25.

Les trois colonnes suivantes correspondent aux intersections deux à deux : la deuxième colonne correspond aux élèves faisant de l'anglais et de l'espagnol ; il y en a au total 164 dont 25 apprennent les trois langues. Donc, il y a 164 – 25 élèves apprenant exclusivement l'anglais et l'espagnol. De la même façon, on trouve 114 élèves qui apprennent exclusivement l'italien et l'espagnol et 185 qui apprennent exclusivement l'anglais et l'italien.

Si on considère la première ligne, on a compté : 25 + 139 + 185 = 326 élèves qui apprennent l'anglais et au moins une autre langue. Comme on sait que 1260 élèves étudient l'anglais, il y en a 1260 – 25 – 139 – 185 = 1260 – 326 = 911 qui étudient l'anglais seul.

Les autres lignes se remplissent de la même façon.

Pour répondre alors à la dernière question, il suffit de soustraire à 2400 le nombre d'élèves qui pratiquent au moins une langue : 2400 – 25 – 139 – 114 – 185 – 911 – 176 – 75 = 775.

	$A \cap I \cap E$ **25**	$A \cap \overline{I} \cap E$ 164 -25 = 139	$\overline{A} \cap I \cap E$ 139 – 25 = 114	$A \cap I \cap \overline{E}$ 210 – 25 = 185	Nombre d'élèves étudiant uniquement…
A ANGLAIS	×	×		×	**1260** – 25 – 139 – 185 = 911
I ITALIEN	×		×	×	**500** – 25 – 114 – 185 = 176
E ESPAGNOL	×	×	×		**353** – 25 – 139 – 114 = 75
	$A \cap I \cap E$ **25**	$A \cap E$ **164**	$I \cap E$ **139**	$A \cap I$ **210**	

Application 3

Dans cet exemple, quatre ensembles sont en jeu, ce qui rend la représentation de Venn délicate alors que l'utilisation d'un tableau de Biya est toujours possible.

Lors d'une enquête dans une salle de classe, on dénombre :
60 élèves qui étudient l'anglais,
38 élèves qui étudient l'italien,
40 élèves qui étudient l'espagnol,
26 élèves qui étudient le français.
Par ailleurs, on sait que :
10 élèves étudient les quatre langues à la fois,
16 élèves étudient à la fois l'anglais, l'italien et l'espagnol,
Aucun élève n'étudie seulement trois langues dont le français,
20 élèves étudient à la fois l'anglais et l'italien,
21 élèves étudient à la fois l'italien et l'espagnol,
24 élèves étudient à la fois l'anglais et l'espagnol,
Aucun élève n'étudie que l'anglais et le français, ou que l'italien et le français, ou que l'espagnol et le français.

Représenter un tableau de Biya de cette situation.
Pour chaque langue, déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement cette langue.
Déterminer le nombre d'élèves interrogés lors de cette enquête.

Solution

La démarche est la même que pour l'application 2. Il faut faire attention à bien distinguer les données de l'énoncé qui doivent être placées sur la ligne 1 de celles qui correspondent à la dernière ligne. Nous avons indiqué dans le tableau les données de l'énoncé en gras.

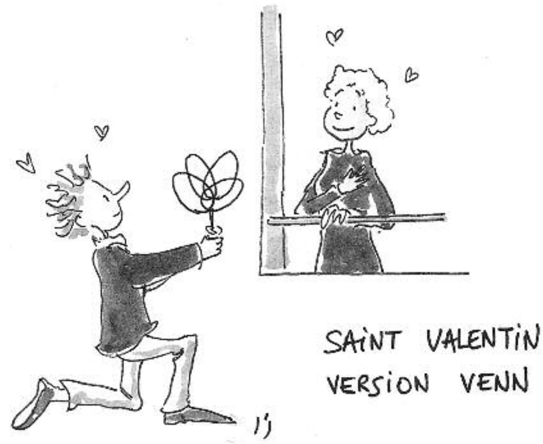
L'énoncé indique que 60 élèves étudient l'anglais. Parmi eux, 10 étudient aussi les trois autres langues, 6 l'étudient avec l'italien et l'espagnol uniquement, 4 avec l'italien seulement et 8 avec l'espagnol seulement : on a donc 60 – 10 – 6 – 4 – 8, soit 32 élèves qui étudient uniquement l'anglais.
On peut ensuite de la même façon calculer le nombre d'élèves qui n'étudient qu'une seule langue. On obtient :
Italien : 13 ; Espagnol : 11 ; Français : 16.

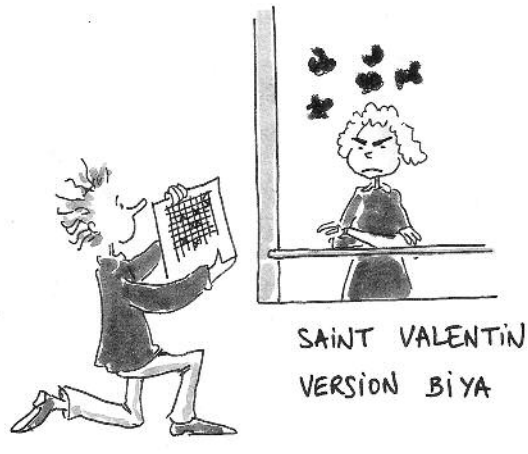
	$A\cap I\cap E\cap F$ **10**	$A\cap I\cap E\cap\overline{F}$ 16 – 10 = 6	$A\cap I\cap\overline{E}\cap F$ **0**	$A\cap\overline{I}\cap E\cap F$ **0**	$\overline{A}\cap I\cap E\cap F$ **0**	$A\cap I\cap\overline{E}\cap\overline{F}$ 20 – 10 – 6 = 4	$A\cap\overline{I}\cap E\cap\overline{F}$ 24 – 10 – 6 = 8	$A\cap\overline{I}\cap\overline{E}\cap F$ **0**	$\overline{A}\cap I\cap E\cap\overline{F}$ 21 – 10 – 6 = 5	$\overline{A}\cap I\cap\overline{E}\cap F$ **0**	$\overline{A}\cap\overline{I}\cap E\cap F$ **0**	
A Anglais	×	×	×	×		×	×	×				**60** – 10 – 6 – 4 – 8 = 32
I Italien	×	×	×		×	×			×	×		**38** – 10 – 6 – 4 – 5 = 13
E Espagnol	×	×		×	×		×		×		×	**40** – 10 – 6 – 8 – 5 = 11
F Français	×		×	×	×			×		×	×	**26** –10 = 16
	$A\cap I\cap E\cap F$ **10**	$A\cap I\cap E$ **16**	$A\cap I\cap F$ 10 – 0 =10	$A\cap E\cap F$ 10 – 0 =10	$I\cap E\cap F$ 10 – 0 =10	$A\cap I$ **20**	$A\cap E$ **24**	$A\cap F$ 10 – 0 = 10	$I\cap E$ **21**	$I\cap F$ 10 – 0 =10	$E\cap F$ 10 – 0 =10	

Le nombre d'élèves interrogés est donc le nombre d'élèves qui étudient une seule langue (colonne de droite) plus le nombre d'élèves qui étudient seulement deux langues ou seulement trois langues ou les quatre langues (première ligne) :
(32+13+11+16)+(4+8+5)+(6)+(10)=105 ; il y a donc 105 élèves qui ont participé à ce sondage.

Conclusion

En somme, le tableau de Biya est une représentation qui permet de mieux appréhender la notion d'intersection au delà du cadre habituel de trois ensembles. Ceci avec des applications concrètes dans la notion de combinaison enseignée dans les programmes scolaires de mathématiques des lycées et collèges au Cameroun. L'apprenant, par cette approche nouvelle, peut visualiser des cas d'intersections, ce qui donne son intérêt majeur au tableau.





NDLR : cet article, dans sa version originale, a déjà été publié dans Mathématice. Il a été iadapté pour sa parution dans Plot.