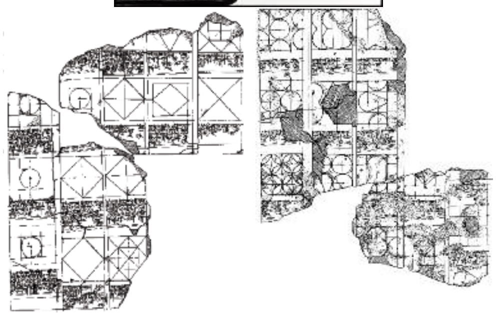
Arpentons avec et

Jean-Paul Mercier

Après la découverte de la numération babylonienne et un travail sur les opérations dans cette numération, objets d'un premier article paru dans le n° 35 de PLOT, Jean-Paul Mercier fait décrypter aux élèves des tablettes traitant de problèmes de longueurs et d'aires, problèmes qu'ils étudieront tout en les reproduisant sur des tablettes d'argile.
Si vous n'avez pas familiarisé vos élèves à la numération des babyloniens, vous pouvez malgré tout les confronter aux problèmes posés sur les tablettes en utilisant notre système décimal. Ces problèmes vieux de plus de 4 000 ans suivent, en effet, étonnamment, les recommandations des programmes de collège de ce début du XXIème siècle.

1) La tablette BM 15285 et les aires en sixième

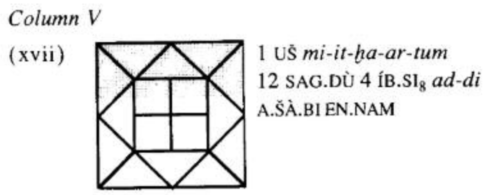


Une face L'autre face

- Aire du carré, partage

En sixième, il est recommandé de « poursuivre le travail effectué à l'école élémentaire, en confrontant les élèves à des problèmes ». La tablette BM 15285 ci-dessus en propose de nombreux : c'est un véritable « Livre » sans les solutions, où les élèves ont tout à construire. Ces derniers sont mis en situation de recherche pour « comparer des aires sans avoir recours à des formules », approche « particulièrement importante pour affermir le sens de cette notion ».

Parmi les nombreux problèmes de partages du carré, j'ai retenu celui-ci :



Dans un carré de côté 1, j'ai dessiné 12 triangles et 4 carrés.
Quelles sont leurs aires ?

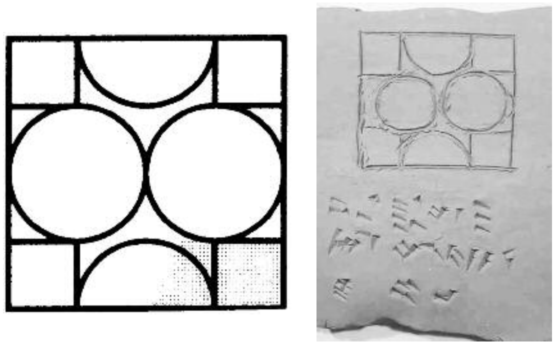
Observer des aires égales, repérer des aires en tant que moitiés d'une autre aire, surtout si les formes sont différentes (triangle rectangle isocèle, carré et parallélogramme) n'est pas toujours évident ! Ce problème permet d'aborder l'étude des nombres 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ; cela change du classique Tangram souvent utilisé sur ce sujet.

À vous de fouiller… !
(http://www.helsinki.fi/~whiting/BM15285.pdf)
- Aire du disque, longueur du cercle

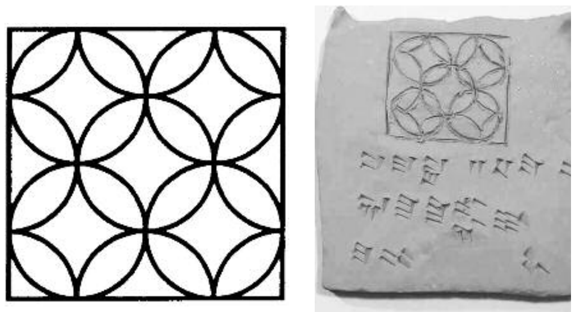
L'autre côté de la même tablette BM 15285 propose des problèmes avec des disques dans le carré.

Mais il nous faut une autre tablette (BM 85194 ci-dessus) pour comprendre comment les babyloniens calculaient sur le cercle. En clair, ils utilisent 3 [pour π] et son inverse 20' : c'est la première évocation du rapport 3 entre la longueur du cercle et son diamètre. Ils ont aussi le même rapport 3 entre l'aire du disque et le carré de son rayon. Ils utilisent aussi le rapport 12 et son inverse 5' entre le carré de la circonférence et l'aire du disque.

Pour l'aire A du disque [de rayon R, de diamètre D et de circonférence C], je fais appliquer 3xRxR ou DxDx3/4. Dans certains problèmes, on utilise A = $C^2/12$ (méthode aussi utilisée par les chinois [Liu Hui]), ou encore CxCx5' puisque l'inverse de 12 est 5' (5/60).



Le côté du carré est 60 coudées. À l'intérieur sont 2 cercles, 2 croissants de lune et 4 carrés. Quelles sont leurs aires ?



Le côté du carré est 60 coudées. À l'intérieur sont 4 coins, 16 barques et 5 nez de vache. Quelles sont leurs aires ?

Le deuxième problème montre combien le travail sur les aires est important. Ce problème semble impossible à résoudre pour des élèves de sixième ; et pourtant, l'aire d'un nez de vache s'obtient en retranchant l'aire d'un disque (4 quarts de disques) à l'aire d'un carré de côté 30 coudées. L'aire de 4 barques s'obtient en retranchant l'aire d'un nez de vache à l'aire du disque, autant de calculs tout à fait abordables en sixième.

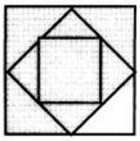
2) En quatrième, calculer des longueurs à partir de la tablette BM 15285 (encore elle) et de la tablette IM 55357

- Quand la tablette BM 15285 rejoint la pyramide du Louvre : en quatrième, je fais résoudre le problème suivant en comparant le dessin avec la vue de dessus de la pyramide du Louvre. La ressemblance est tellement étonnante.

En donnant une des dimensions (côté de la pyramide ou côté du bassin), on peut calculer les aires et les longueurs manquantes.

Column III

(ix)



⌈1 UŠ⌉ ÍB.SI$_8$ ŠÀ.BA ÍB.SI$_8$ *ad-di* ⌈ÍB.SI$_8$⌉
ša ad-du-ú ÍB.SI$_8$ *i-mi-id*
i-na ŠÀ ÍB.SI$_8$ *ša-ni-tim* ÍB.SI$_8$
ša-lu-uš-tam ad-⌈*di*⌉ *ša ad-du-ú*
mi-it-ḫa-ar-tam i-mi-id
A.ŠÀ.BI EN.NAM

Dans un carré de côté 1, j'ai dessiné un carré. Ce carré « touche » le premier carré. Dans le deuxième carré, j'ai dessiné un troisième carré. Celui-ci « touche » le deuxième carré. Quelle est son aire ?

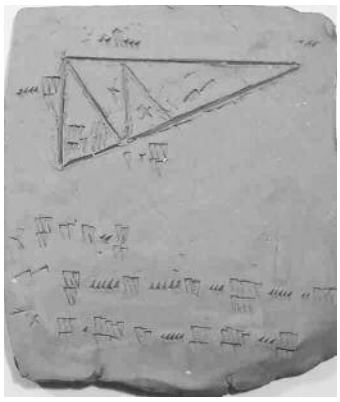
En numération babylonienne, cela se résout à l'aide des tables de 7' 30'' pour 1/8 et de 3' 45'' pour 1/16 (voir l'article précédent dans le n° 35 de PLOT). Rappelons en effet que l'inverse de 2 est noté ici 30' (0 unité et 30 soixantièmes), celui de 4 est noté 15' (15 soixantièmes). Ainsi 1/8 s'écrit 7' 30'', c'est-à-dire 7 soixantièmes et 30 trois-mille-six-centièmes et 1/16 s'écrit 3' 45'', c'est-à-dire 3 soixantièmes et 45 trois-mille-six-centièmes.

- Triangle rectangle et proportionnalité : la tablette IM 55357 datée entre –2000 et –1500, trouvée près de Tell Harmal (Irak).

Scribe babylonien

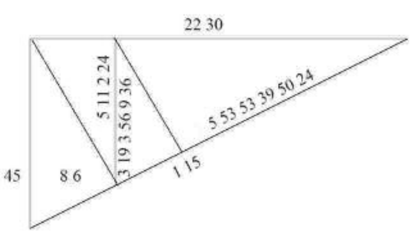
Un triangle, 1 la longueur, 1 15' la grande longueur, 45' la largeur supérieure. 22' 30" la surface complète. Dans 22' 30" la surface complète, 8' 6" la surface supérieure, 5' 11" 2 24 la surface suivante, 3' 19" 3 56 9 36 la troisième surface, 5' 53 53 39 50 24 la surface inférieure.

La longueur supérieure, la longueur moyenne, la longueur inférieure, et la perpendiculaire (la « pendiculaire » = la descendante) sont quoi ?



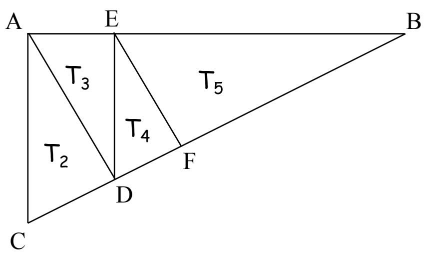
En quatrième, j'ai étudié la tablette IM55357, du musée de Bagdad, perdue depuis 2002 (guerre en Irak). Cette tablette est souvent montrée car elle est belle, mais rarement étudiée. Je vais donc détailler ce qui en a été compris.

Sur cette tablette, les données écrites sont de deux natures : des longueurs et des



aires. On peut considérer, *a posteriori*, que ces aires ont été calculées en préparation du problème. Nous remarquons qu'à la place du 1 de la longueur est écrite l'aire totale 22' 30'' du triangle. Le problème posé est de calculer toutes les longueurs manquantes, ce que fait le scribe en plusieurs étapes successives avec un même algorithme détaillé plus loin.

En classe de quatrième, contrairement à la méthode du scribe qui utilise les aires pour calculer les longueurs comme nous le verrons plus loin, nous avons calculé les longueurs en utilisant la proportionnalité et nous avons ensuite vérifié les aires données sur la tablette. Il est en effet à remarquer que le triangle T_1 (ABC) et donc les triangles T_2, T_3, T_4 et T_5, ont des côtés proportionnels à ceux du triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5.

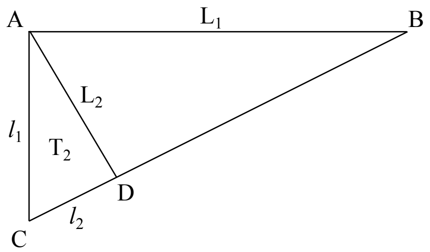


Pour des élèves utilisant la numération babylonienne, la résolution s'écrit ainsi.

Triangle	Longueur	Largeur	Grande longueur Hypoténuse	Aire (longueur x largeur : 2)
T_1 proportionnalité	1 4 x 15' 4	45' 3 x 15' 3	1 15' 5 x 15' 5	1 x 45' : 2 = 22' 30'' 4 x 3 : 2 = 6. Non utilisé par les élèves mais cela aurait pu l'être : 6 x 15' x 15' = 22' 30''
T_2	4 x 9' = 36'	3 x 9' = 27'	5 x 9' = 45'	36' x 27' : 2 = 8' 6'' (ou 6 x 9' x 9')
T_3	4 x 7' 12'' = 28' 48''	3 x 7' 12'' = 21' 36''	5 x 7' 12'' = 36'	28' 48'' x 21' 36'' : 2 = 5' 11'' 2 24
T_4			28' 48''	3 19 3 56 9 36
T_5	À finir			

Vous pouvez faire là aussi le même travail en numération décimale. Dans les deux cas, cela permet de réinvestir les propriétés sur les angles d'un triangle rectangle, de justifier qu'un triangle est un agrandissement (ou une réduction) d'un autre triangle si ces deux triangles ont les mêmes angles, puis de travailler sur la proportionnalité des longueurs de leurs côtés.

Pour nous, professeurs, il est possible d'exploiter le travail du scribe, une fois la proportionnalité comprise.
Sa méthode (page suivante) repose sur les rapports de longueurs égaux dans les triangles semblables T_1 (ABC) et T_2 (ADC) : $L_1/l_1 = L_2/l_2$ pour le calcul, ici, de L_2.



Ce que fait le scribe.	On peut expliciter ainsi.
Toi, tu sais le procédé, igi 1, *la longueur inverse, porte à 45'. 45' tu vois.* *Porte 45' à 2. 1 30' tu vois.*	*Le scribe considère, ici, le triangle T_1.* Prends l'inverse de L_1 $[L_1 = 1] : 1/ L_1$ Multiplie par l_1 : $l_1 \times 1/L_1$ $[45' \times 1 = 45']$ Multiplie par 2 : $2 \times l_1/L_1$ $[2 \times 45' = 1\ 30']$ *Il utilise alors l'égalité des rapports $l_1/L_1 = l_2/L_2$ et passe dans le triangle* T_2 *avec son aire A.*
Porte à 8' 6" la surface supérieure, 12' 9" tu vois.	Multiplie par A : $A \times 2 \times l_2/L_2$ $[A = 8'\ 6''$ et $8'\ 6'' \times 1\ 30' = 12'\ 9'']$
Par 12' 9", quel est le côté [racine] ? 27' est le côté.	On obtient l_2^2. $[l_2^2 = 12'\ 9'']$ (puisque $A = L_2 \times l_2 /2$, $A \times 2 \times l_2/ L_2 = l_2^2$) On trouve le côté l_2 $[12'\ 9'' = 729'' = (27')^2]$
27' la largeur. 27' tu partages (en deux). 13'30" tu vois.	Divise par 2 : $l_2/2$, $[27'/2 = 13'\ 30'']$
Inverse 13'30",	Prends l'inverse de $l_2/2$: $2/l_2$ $[2/l_2 = 4\ \ 26'\ 40'']$
porte à 8'6" la surface supérieure, *36' tu vois, la longueur qui est la contrepartie de la longueur 45', la largeur.*	Multiplie par l'aire A : $A \times 2/l_2 = L_2$ $(8'\ 6'' \times 4\ \ 26'\ 40'' = 36'\ ;\ L_2 = 36')$

Donnant les aires avant les dimensions, ce problème est probablement un « exercice de style » scolaire, les élèves devant mettre en œuvre une méthode connue à l'époque pour trouver les dimensions.

Conclusion

Travailler sur de tels problèmes vieux de 4 000 ans et faisant partie de l'histoire de l'humanité donne une motivation particulière chez les élèves et aiguise leur curiosité. Les élèves entrent facilement dans le jeu.

Les longueurs et les aires sont une source de problèmes très formateurs à tous les niveaux. Ceux de cette tablette sont d'une étonnante actualité.

Concernant le disque et le cercle, les calculs approchés avec 3 (pour π) et 12 (pour 4π) montrent aux élèves qu'on peut obtenir facilement des ordres de grandeur tout à fait corrects qui étaient la référence il y a 4 000 ans.

Les tablettes babyloniennes nous offrent d'autres thèmes de recherches : volumes et capacités, échanges de grains, masses ou poids de matériaux précieux, calculs de journées de travail d'ouvriers, longueur de cordes dans le cercle, qui peuvent intéresser et donner de bons problèmes pour nos classes.

Bibliographie

François THUREAU-DANGIN, Textes Mathématiques Babyloniens, E.J.Brill Ed., Leiden 1938

Christine PROUST, Tablettes Mathématiques de Nippur, De Boccard Ed., 2007

IREM de POITIERS, Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les AIRES, Octobre 2010 et Les LONGUEURS, (à paraître bientôt)

A remarkable collection of Babylonian mathematical texts, Jöran Friberg, Springer 2007, p218

Sites pour accéder aux documents utilisés

http://www.ias.ac.in/resonance/August2003/pdf/August2003p27-42.pdf

http://131.111.104.4/people/robson/apsamikku.pdf

http://motivate.maths.org/conferences/conference.php?conf_id=88

http://http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/