De la signification du mot « ALGÈBRE »

François Lavaux

Pour répondre aux interrogations, tant d'élèves que de collègues, sur la signification du mot «algèbre», François Lavaux a écrit ce petit résumé. Il l'a transmis à PLOT qui le publie volontiers. Il est bien dans l'esprit des échanges sans prétention entre gens du même métier que veut impulser notre revue. Il s'arrête au 19ème siècle, là où l'algèbre, de science de résolution des équations bascule, derrière Abel et Galois, dans la science de l'étude des structures. Peut-être que l'un de vous, lecteurs, aura envie d'écrire la suite de l'histoire…

François Lavaux est professeur de mathématiques, TZR dans l'académie de Toulouse.

L'Algèbre peut apparaître aujourd'hui comme une branche des mathématiques des plus difficiles à définir. En effet, une simple observation montre que le contenu de la partie autrefois dite « algèbre »[1] d'un cours de collège et celle, du même nom, d'un cours de licence semblent n'avoir que peu (ou pas) de liens *a priori* : la première traite principalement de techniques de résolution d'équations tandis que la seconde détaille l'étude de structures dites algébriques (groupe, anneaux, etc.).

Il existe même, selon le dictionnaire choisi, des désaccords importants sur la définition du mot Algèbre. Par exemple, le Larousse propose « Science du calcul des grandeurs représentées par des lettres affectées du signe + ou du signe – » tandis que le Hachette encyclopédique écrit : « Partie des mathématiques qui traite des propriétés des quantités et de leurs relations au moyen de chiffres, lettres et symboles, dans le but de généraliser les problèmes ».

Faut-il conclure qu'il est possible d'entendre aujourd'hui derrière le même mot Algèbre des concepts qui n'auraient aucun lien ? Par ailleurs, certains auteurs et professeurs distinguent l'Algèbre classique de l'Algèbre moderne. Faut-il comprendre qu'il y aurait, en fait, différentes Algèbres ?

L'histoire de cette science apporte une réponse simple à ces questionnements.

Il peut être opportun de commencer par l'origine de son nom. Elle débute au Moyen Orient, à partir du VIIème siècle. À cette époque, la civilisation perse connaît un essor important. En particulier, des domaines tels que le commerce et l'architecture soulèvent de nouveaux problèmes. En conséquence, certains savants recherchent des méthodes (mathématiques en l'occurrence) permettant leur résolution.

L'Histoire retiendra, entre autres, le mathématicien Muhammad ibn Musa Al-Khawarizmi[2] (79? – 8??) qui rédige, au IXème siècle, un ouvrage intitulé « Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr w'al-Muqàbala »[3]. C'est un traité sur la résolution de problèmes liés aux équations de degré deux.

[1] Le mot a disparu des programmes scolaires du collège. On parle désormais d' « activités numériques ».

[2] Les noms arabes n'ont pas de transcriptions officielles avec notre alphabet. Des choix ont donc été faits pour ce document et peuvent différer de ceux utilisés dans d'autres sources.

[3] Ce nom est souvent tronqué et seule la fin est retenue à savoir *« al-Jabr w'al-Muqàbala »*.

Pour bien cibler de quoi il s'agit, présentons en quelques mots le contenu de cet ouvrage.

À son époque, les relatifs sont déjà utilisés mais ils ne sont pas encore reconnus comme nombres, aussi la première partie de son travail consiste à transformer les propos pour n'obtenir que des coefficients positifs.
Ainsi, il nomme « al-jabr » —ce qui signifie « réunion (d'éléments dispersés), reconstruction »— l'opération qui équivaut aujourd'hui[4] à faire disparaître un coefficient négatif en ajoutant son opposé aux deux membres.
Par exemple, avec les notations actuelles, transformer « $x - 3 = 4$ » en « $x = 4 + 3$ ».

La seconde partie de son travail a pour but de simplifier les problèmes à coefficients positifs et ainsi se ramener à une des six formes canoniques dont il explique la solution. Il expose pour ce faire deux outils.
Il nomme « al-muqabala » - ce qui signifie « mise en opposition » - l'opération qui équivaut aujourd'hui à simplifier deux termes positifs égaux qui apparaissent dans les deux membres d'une équation.
Par exemple, avec nos notations, transformer « $2x + 4 = x^2 + 4$ » en « $2x = x^2$ ».
Il nomme « al-hatt » l'opération qui équivaut aujourd'hui à diviser les deux membres d'une équation par un même nombre.
Par exemple, avec les notations actuelles, transformer « $4x = 14$ » en « $2x = 7$ ».

Cet ouvrage est devenu à l'époque un incontournable et a beaucoup voyagé. Au fil du temps, le mot « al-jabr » finit par être utilisé pour parler du travail d'Al-Khawarizmi dans son ensemble. Ensuite, par extension, il désigne tout ce qui est connu au Moyen-Orient de la science de la résolution des équations.
Au XIVème siècle, les travaux d'Al-Khawarizmi et des mathématiciens qui ont suivi arrivent en Europe. Plusieurs ouvrages (dont « al-Jabr w'al-Muqàbala ») sont traduits. Ainsi, le mot « al-Jabr » sera latinisé et donnera le mot « Algèbre » que nous utilisons toujours.

Il est opportun de faire ici une petite remarque historique. En effet, avec cette définition, cette science existait déjà depuis environ trois mille ans. Les babyloniens, bien que n'utilisant aucune notation symbolique et aucun nom que l'histoire ait retenu pour désigner ce travail, savaient résoudre des équations des premier et second degrés en utilisant certaines propriétés des opérations. D'autres peuples tels que les égyptiens, les chinois et les grecs ont également laissé des traces de connaissances du même ordre.

Pour pouvoir continuer de répondre aux questions de l'introduction, regardons maintenant l'évolution du questionnement des Algébristes. Apparu dans un premier temps au Moyen-Orient, il se résume pendant longtemps à chercher des méthodes de résolution pour les équations de degré supérieur à 2. Cela fait apparaître dès le Xème siècle les notions de « al-adad al muntiqa » c'est-à-dire de rationnel et « al-adad al-summa » à savoir d'irrationnel, sans toutefois leur donner immédiatement le statut de nombres.

À la Renaissance, c'est le début de la formalisation que nous utilisons encore. Les écoles allemandes et italiennes développent entre autre le concept important de l'inconnue (« coss » en allemand, « cosi » en italien) et avancent vers l'écriture des équations avec des lettres.

Viète, Descartes puis Leibniz vont faire franchir un pas décisif en réfléchissant à la mécanisation des principes de résolution et ainsi en s'éloignant de l'idée de connaître de nombreux cas canoniques pour un degré donné. D'autres mathématiciens tel Fermat travaillent en ce sens.

Pendant une période, l'Algèbre est un peu laissée de côté, l'Analyse naissante lui étant préférée. En outre, les premiers pas

[4] À l'époque de Al-Khawarizmi, les équations ne sont pas formalisées comme elles le sont aujourd'hui. Le travail est purement rhétorique. Pour autant, pour la clarté du propos, il est plus simple de les utiliser pour présenter les raisonnements mais il faut veiller à ne pas faire d'anachronisme.

de cette dernière étant imprécis, la frontière entre les deux sciences n'est, dans un premier temps, pas très claire. Puis, les choses vont considérablement s'accélérer et se densifier.

En 1770, les deux mémoires de Lagrange et Vandermonde vont avoir un effet décisif. Ils y font le bilan précis et rigoureux de tout ce qui a été fait jusqu'alors en terme de résolution des équations et proposent d'élaborer des principes généraux et d'étudier pourquoi ceux-ci ne fonctionnent pas avec le degré 5.

C'est Abel, en 1826, qui, en travaillant sur l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations de degré supérieur à 4, fait encore avancer la vision de l'algèbre en formulant ainsi son problème : « […] *on se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pouvait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain ; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité sans la trouver… Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible*. ».
Abel propose donc de se poser en tout premier lieu la question de la résolubilité d'une équation. Cette dernière idée est un tournant important. Une partie de l'Algèbre devient la recherche de critères précis qui permettraient de dire s'il est opportun de chercher des solutions.
Pour répondre à ces nouvelles questions, il a fallu étudier les choses d'un point de vue très différent. Par exemple, Lagrange et Vandermonde ont ainsi mis en évidence et travaillé sur le groupe des permutations. Abel a donné naissance à la théorie des structures algébriques.

Le propos peut s'arrêter ici. L'Histoire nous apprend donc que l'Algèbre est en fait une branche très large des mathématiques. Elle a commencé par la résolution des équations, puis les recherches autour de leurs solutions a généré aussi bien des outils de calcul que des questions plus large sur la nature des objets manipulés et par là toute la théorie des structures. Aujourd'hui, cette science est si vaste qu'elle peut être subdivisée en de nombreuses parties et il existe de nombreux autres adjectifs que l'on peut faire suivre au mot Algèbre tels que « linéaire », « bilinéaire » ou « homologique ».
Lorsque quelqu'un parle d'Algèbre dite « classique », il prend un point de vue historique et se réfère à la partie la plus anciennement étudiée de celle-ci à savoir la résolution des équations. D'ailleurs, l'adjectif est un peu trompeur car certaines techniques sont tout de même assez « modernes ».
Dans la même idée, l'expression « Algèbre moderne » cible l'étude des structures algébriques et de leurs propriétés, c'est-à-dire le travail effectué dans ce domaine mathématique à partir de la fin du XVIIIème siècle (à la base, surtout les travaux d'Abel).

Il y a une dernière chose importante que l'histoire de l'Algèbre peut nous apprendre et qui concerne justement la « compartimentation » du savoir mathématique en branches. En effet, si celui-ci est très utile aux étudiants (voire rassurant) et permet, par exemple, de préciser la nature de la question posée, il ne dit rien sur la voie à suivre pour la résoudre.
Regardons par exemple le problème antique de la duplication du cube. Il a un énoncé purement géométrique (c'est une construction), pourtant l'impossibilité de le résoudre a été démontrée par un raisonnement algébrique une fois mise en forme la théorie des nombres constructibles.
À l'inverse, le théorème de Fermat est une question clairement algébrique (c'est une équation), mais la démonstration d'Andrew Wiles fait pour sa majeure partie appel à de l'Analyse.

Références bibliographiques

Cavaillès J., *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1969.
Dahan-Dalmedico A., Peiffer J., *Une histoire des mathématiques*, Seuil, Paris, 1986.
Vuillemin J., *La Philosophie de l'algèbre*, PUF, Paris, 1962.