

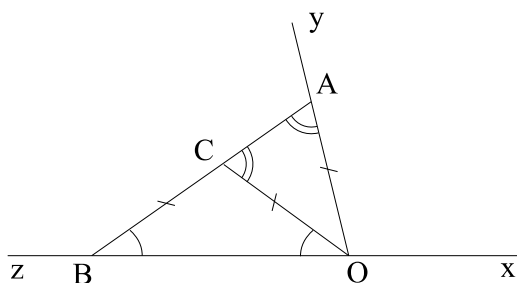
La trisection de l'angle

Henry Plane

Le problème de partager un angle en trois angles égaux, à la règle et au compas, est étudié depuis fort longtemps. La trace en existe chez plusieurs auteurs.



Archimède (3^{ème} siècle avant Jésus-Christ) attirait l'attention sur la figure suivante :



Soient un angle \widehat{xOy} et 3 points A, B et C vérifiant les conditions suivantes :
 A sur [Oy),
 B sur la demi-droite [Oz) opposée à [Ox),
 C sur [AB] tels que $AO = OC = CB$.
 Les triangles OAC et CBO sont isocèles, alors :

$\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ et $\widehat{COB} = \widehat{CBO}$,
 Mais : $\widehat{OCA} = \widehat{OBC} + \widehat{COB} = 2 \widehat{OBC}$,
 \widehat{OCA} et $\widehat{OBC} + \widehat{COB}$ étant deux manières d'exprimer le supplémentaire de \widehat{BCO} .

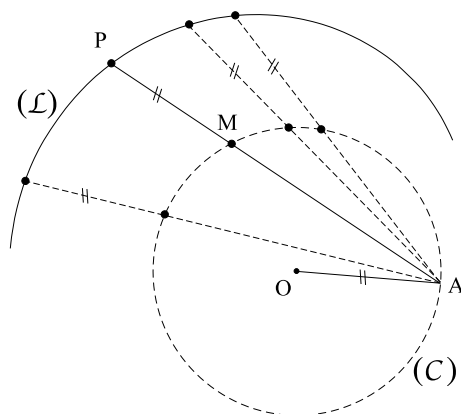
Et : $\widehat{xOA} + \widehat{COB} = \widehat{OCA} + \widehat{OAC}$
 car ce sont deux manières d'exprimer le supplémentaire de \widehat{AOC} = $4 \widehat{OBC}$,

Donc $\widehat{xOA} = \widehat{xOy} = 3 \widehat{OBC}$.

Mais la construction de la figure, à partir de l'angle donné \widehat{xOy} , à la règle et au compas seuls, s'avère impossible (essayez donc !).

Diverses constructions en approchent néanmoins.

Etienne Pascal, le père de Blaise, lorsqu'il vint s'installer à Paris vers 1635, présenta à ses amis du Cercle des Minimes, chez le père Mersenne, la solution suivante :

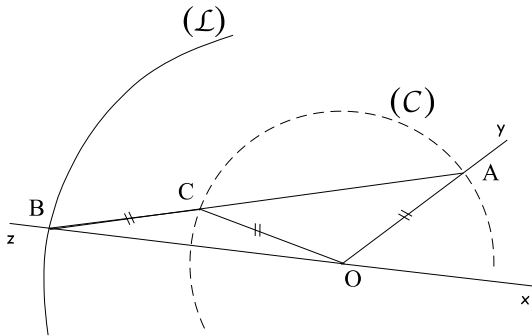


Construire d'abord une conchoïde particulière de cercle ainsi définie : soit le cercle (C) de centre O et de rayon OA. Pour tout point M de (C), on prolonge la corde AM d'une longueur $MP = OA$. On obtient ainsi une courbe (L) que l'on conservera avec son cercle générateur (C) pour

apporter réponse au problème de la trisection.

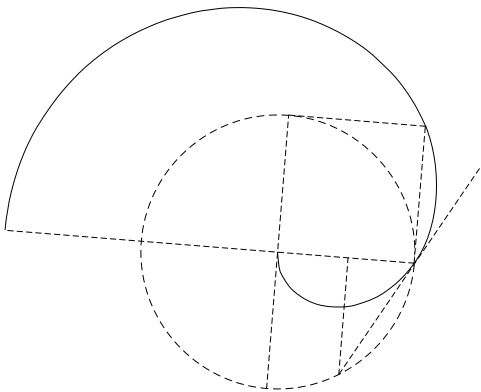
Soit l'angle \widehat{xOy} . On place le rayon $[OA]$ du cercle (C) sur $[Oy]$. $[Oz]$ recoupe (\mathcal{L}) en B et (AB) recoupe (C) en C .

On a $BC = CO = OA$



Et donc : $\widehat{OBA} = 1/3 \widehat{xOy}$ selon la figure d'Archimède.

Ces messieurs du Cercle de Mersenne admirèrent le procédé. Ils poussèrent plus loin le tracé de (\mathcal{L}) avec tangentes et points remarquables et lui donnèrent le nom de « Limaçon de Pascal ».

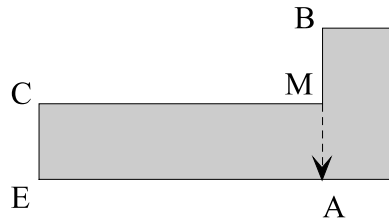


Par la suite, la géométrie analytique s'en empara, mais ceci est une autre histoire...

Les charpentiers et menuisiers abordent, eux, la question autrement. Ils fabriquent un outil en forme de **L** remplissant les conditions suivantes :

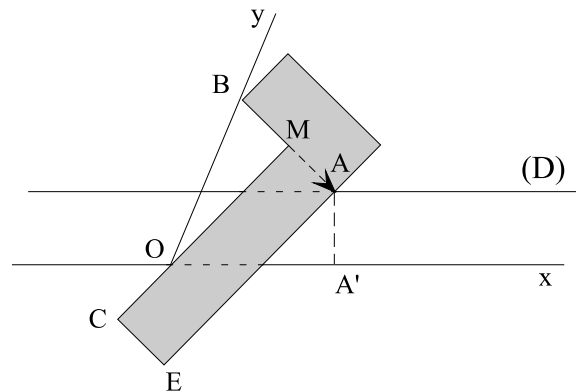
MC est la médiatrice de $[AB]$.

Le côté $[AE]$ est parallèle à $[MC]$.



On agit comme suit pour couper en trois angles égaux un angle \widehat{xOy} :

Tracer la parallèle (D) à $[Ox]$ à la distance AM . L'outil s'y prête.



Disposer l'outil sur la figure xOy avec A sur (D) , B sur $[Oy]$ et O sur $[CM]$.

A' étant la projection orthogonale de A sur $[Ox]$, les trois triangles rectangles OAA' , OAM et OBM sont égaux et, par suite, $\widehat{xOA} = \widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 1/3 \widehat{xOy}$.

Les professeurs et élèves qui fabriqueront un « **L** » en carton obtiendront des résultats de bonne précision.

NDLR : la brochure APMEP n° 70 « Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle) » est épuisée, mais on la trouve en ligne sur le site de l'APMEP.