# La docimoyenne

Daniel Reisz

*Voici un article plein de calculs, comportant même des démonstrations. PLOT serait-il, dans ce numéro, en humeur de faire des mathématiques ? Sans doute, mais les mathématiques présentées ici sont subtilement reliées à nos pratiques quotidiennes.*

*Les professeurs, même ceux de mathématiques, ne sont pas exempts de contradictions internes. Daniel Reisz pointe ici, avec malice, une de nos pratiques courantes, mais qui semble au premier abord en contradiction avec ce que nous enseignons parallèlement sur l'addition des fractions.*

*Se peut-il que nous soyons pris, nous mathématiciens, en flagrant délit de : « Faites ce que je dis, pas ce que je fais … » ?*

Daniel Reisz a été IPR dans l'académie de Dijon.

**I – « Somme » de deux notes ; somme de deux fractions.**

Quel professeur, corrigeant dans un même devoir un exercice noté sur 5 et un problème noté sur 15 n'a pas écrit :

$$\frac{3}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{20} \text{ ?}$$

Jamais de la vie crient les puristes ! Mais j'affirme quand même que cela est assez répandu et que cela mérite réflexion, voire même donner lieu à un certain nombre d'activités en classe.

Je propose d'appeler $\frac{11}{20}$ la *docimoyenne* de $\frac{3}{5}$ et de $\frac{8}{15}$ (contraction de « docimologie » et de « moyenne »).

Premier réflexe :

$\frac{3}{5}$ c'est une façon d'écrire « 3 points sur un total de 5 points possibles », « 3 sur 5 » et cela n'a rien à voir avec la fraction représentant d'un rationnel qui s'écrit 0,6 sous sa forme décimale. Oui et non !

Cela a, bien sûr, à voir, parce que :

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{12}{20}=\frac{9}{15}=....$$

C'est toujours la même note sur des échelles de notation différentes et ce sont en même temps des fractions égales.

Et en même temps, cela n'a rien à voir, parce que, lorsque j'écris $\frac{3}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{20}$, il s'agit là d'un abus de langage qui pourrait apporter une confusion avec la somme classique de deux fractions : $\frac{3}{5}+\frac{8}{15}=\frac{17}{15}$

Quittons un instant les notes et la docimologie et revenons aux fractions.

Le produit de la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$ est $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, règle on ne peut plus naturelle.

Quel élève n'a pas eu la tentation de penser qu'il est alors tout à fait naturel de poser comme somme des fractions

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ?

Et le professeur d'expliquer qu'il n'en est rien et qu'à part d'être commutative et associative, cette addition n'a pas les « bonnes » propriétés pour faire des rationnels d'abord un groupe et ensuite un corps (j'utilise ici ce vocabulaire pour faire court). Et de dire que la vraie bonne addition des fractions est celle apprise à l'école : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

Pourquoi est-ce la « bonne » ? On peut donner à cela une réponse purement mathématique, mais peut-être peu convaincante et peu accessible à un collégien. On peut aussi la justifier « expérimentalement » avec des parts de gâteaux. Toujours est-il qu'on a intérêt à utiliser pour la moyenne docimologique un signe opératoire spécifique, tel par exemple :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Revenons à présent à la docimologie. Laquelle des deux notes $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{15}$ est la meilleure ? Je réduis les deux « fractions » au même dénominateur $\frac{9}{15}$ et $\frac{8}{15}$ pour conclure !

On peut aussi préférer les mettre toutes deux sur notre habituelle échelle [0 ; 20] :

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} \text{ et } \frac{8}{15} = \frac{32}{60} = \frac{\frac{32}{3}}{20} \approx \frac{11,66}{20}.$$

**II – Inégalité de la docimoyenne.**

Considérons notre docimoyenne :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

*Théorème* :

si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \leq \frac{c}{d}$ .

Démontrons-le :

Les nombres *a, b, c* et *d* en jeu étant tous positifs,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow ad \leq bc \Rightarrow ad + ab \leq bc + ab \Rightarrow$$

$$a(d+c) \leq b(a+b) \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$$

et de même on démontre : $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \leq \frac{c}{d}$.

*Remarque* :

Il est facile de vérifier que la docimoyenne est une « moyenne » au sens le plus général du mot. En effet il faut pour cela que $\alpha \leq \alpha \oplus \beta \leq \beta$ ce qui vient d'être vérifié et que $t\alpha \oplus t\beta = t(\alpha \oplus \beta)$ ce qui est évident.

Cet encadrement de la docimoyenne par les deux notes fait immanquablement penser à nos classiques inégalités de la moyenne.

Rappelons que si $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$ avec toujours pour fixer les idées $\alpha \leq \beta$ moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de $\alpha$ et $\beta$ vérifient :

$$\alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta$$

*Je propose à votre sagacité la question suivante : la docimoyenne qui se trouve entre et peut-elle être située plus précisément entre les moyennes classiques ?*

**III – Aspects barycentriques.**

Lorsqu'on met cote à cote dans le même devoir les deux notes $\frac{3}{5}$ et $\frac{8}{15}$, tout élève perçoit que la seconde « pèse » trois fois plus lourd que la première. Nous avons aussi, en particulier dans les examens, l'habitude d'utiliser les notes affectées d'un coefficient. Au fond « peser trois fois plus lourd » doit être plus ou moins synonyme de « la première note est affectée du coefficient 1 et la seconde du coefficient 3 ». Regardons de plus près cette parenté !

Lorsqu'à un examen les différentes épreuves bénéficient de différents coefficients, ces coefficients sont choisis selon le poids qu'on veut donner aux différentes épreuves, à des notes élaborées par les correcteurs sur une même échelle de notes (en France il s'agit en général de l'échelle [0 ; 20]). Par exemple 4 épreuves X, Y, Z, T sont affectés des coefficients respectifs 2, 3, 4, 1. Si un candidat obtient les notes $\frac{x}{20}, \frac{y}{20}, \frac{z}{20}, \frac{t}{20}$ alors sa moyenne *m*, sur 20, est donnée par :

$$m = \frac{2x+3y+4z+t}{2+3+4+1} = \frac{2x+3y+4z+t}{10}$$

c'est-à-dire que *m* est le *barycentre* des *« points » x, y, z, t, affectés respectivement des masses 2, 3, 4, 1.*

Essayons maintenant de passer de la doci-moyenne $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ à l'aspect barycentrique évoqué ci-dessus. La clé réside évidemment dans le fait qu'il faut exprimer les deux notes $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ respectivement établies sur les échelles de notation [0 ; $b$] et [0 ; $d$] sur une échelle commune. La plus évidente, sinon forcément la plus simple, est l'échelle [0 ; $bd$].

La note $\frac{a}{b}$ devient $\frac{ad}{bd}$ et sera affectée du coefficient $b$. La note $ad$ est donc exprimée sur un total de $bd$ et sera affectée du coefficient $b$.

La note $\frac{c}{d}$ devient $\frac{cb}{db}$ et sera affectée du coefficient $d$.

La moyenne pondérée sur une échelle [0 ; $bd$] sera donc

$$\frac{b \times ad + d \times cb}{b+d} = \frac{bd(a+c)}{b+d} = bd(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}).$$

Les coefficients $b$ et $d$ sont les poids affectés à chaque exercice. Leur total sera donc de $b + d$ soit 20 dans les calculs qui suivent, tandis que la moyenne pondérée que l'on calcule est sur un total de $bd$. Il ne faut donc pas confondre le 20 que l'on va trouver au dénominateur avec l'expression d'une note sur 20.

Revenons à notre exemple : on ramène les notes sur une échelle commune [0 ; 75].

$\frac{3}{5} = \frac{45}{75}$ $\frac{8}{15} = \frac{40}{75}$ et la moyenne pondérée, sur l'échelle [0 ; 75] sera :

$$\frac{5 \times 45 + 15 \times 40}{5+15} = \frac{825}{20} = 75 \times \frac{11}{20} :$$

soit 41,25 sur 75.

On a bien $\frac{41,25}{75} = \frac{11}{20}$.

Les deux notes ont été affectées des coefficients 5 et 15. On retrouve bien le poids « trois fois plus lourd » de la seconde.

Dans notre exemple on aurait pu se retrouver sur l'échelle [0 ; 15] et plus généralement utiliser l'échelle commune [0 ; PPCM ($b$,$d$)].

NDLR : Sur le même sujet, on pourra lire l'article « Médiation de fractions » de Jacques Bair, dans la revue « Losanges » n° 8 d'avril-mai 2010, pages 38 à 46, périodique bimestriel de la SBPMef.

*Ouf ! Nous voici pleinement rassurés. Les contradictions signalées en début d'article n'étaient qu'apparentes. Cette analyse convaincante, qui réconcilie brillamment la mathématique avec la pratique enseignante est une bonne illustration d' un proverbe bien connu : le mathématicien, tel le chat, retombe toujours sur ses pattes !*