

Remboursement d'emprunt : un classique plein de surprises

Agnès Monfront

Agnès Monfront fait partie de notre petit groupe de relecteurs* mais, pour PLOT 33, elle s'est mise à son clavier pour nous relater un TP d'informatique mené avec ses élèves de Terminale STG. Il n'est pas fréquent de recevoir des articles concernant cette section ; souhaitons qu'il suscite d'autres propositions...

* être relecteur de PLOT, c'est s'engager à lire et critiquer des articles que nous recevons à partir d'une grille de lecture que nous vous fournissons. Pour toute envie d'en savoir plus, voire de rejoindre l'équipe, contacter Isabelle Flavier (iflavier@orange.fr).

L'exercice est classique. Il s'agit de construire sur tableur un tableau d'amortissement (exercice extrait de la brochure [1]).

Pour un achat immobilier, une personne emprunte 50 000 euros à intérêts composés au taux mensuel de 0,4 %. Le remboursement s'effectue en 60 mensualités égales à 938,99 euros. Voici un extrait du tableau d'amortissement, établi à l'aide d'un tableur et fourni par la banque :

	A	B	C	D	E	F
1	Capital emprunté : 50 000 €			Taux mensuel : 0,4 %		
2						
3	n° de la mensualité	Capital restant dû en début de mois	Montant de la mensualité en euros	Montant des intérêts	Capital amorti en euros	Capital restant dû en fin de mois
4	1	50 000,00	938,99	200,00	738,99	49 261,01
5	2	49 261,01	938,99	197,04	741,95	48 519,06
6	3	48 519,06	938,99	194,08	744,91	47 774,15
7	4	47 774,15	938,99	191,10	747,89	47 026,26

Donner les formules, à recopier vers le bas, à entrer dans chacune des cellules D4, E4, F4 et B5 pour obtenir les colonnes B, D, E et F.

L'objectif est triple :

- Réinvestir le cours sur les pourcentages vu en mathématiques,
- Utiliser le tableur pour faire des simulations,
- Faire le lien avec les autres disciplines.

Je pars donc ce matin-là l'esprit tranquille ; voilà un TP qui ne devrait présenter aucune surprise. Certains élèves auront

du mal avec les formules mathématiques, d'autres oublieront l'importance des références absolues. Je vois les erreurs qui s'annoncent et je me prépare à y remédier.

Saisir au vol les idées des élèves

Seulement voilà, un cours se fait avec des élèves et certains ont des idées que je n'avais pas prévues. Alors que les réponses attendues sont :

$$D4 = \$E\$1*B4, E4 = C4-D4 \text{ et}$$

$$F4 = B4-E4, B5 = F4.$$

Deux élèves de la classe me proposent autre chose pour E4 et F4 : on fait les soustractions puis on peut écrire en E5 : $=(1+\$E\$1)*E4$ et écrire en F5 : $=(1-\$E\$1)*F4$.

Autrement dit, capital amorti et capital restant dû seraient des suites géométriques de raison respectivement $1 + 0,004$ et $1 - 0,004$. Je n'en avais aucune idée. Alors que faire ? S'adapter, rebondir, changer un peu les objectifs du TP, ouvrir le débat.

Conjecture et contre-exemple

[1] Eduscol - « Série STG ; exemples d'exercices de mathématiques » -28 Avril 2006

<http://eduscol.education.fr/cid46491/exemples-d-exercices-de-mathematiques-serie-stg.html>

La suite de cet exercice (exercice 9) est également intéressante.

La question est posée à l'ensemble de la classe. Les deux formules proposées par leurs camarades leur paraissent-elles correctes ? Comment vérifier ?

L'idée vient vite de rajouter deux colonnes pour y entrer les formules proposées par ces deux élèves et comparer les résultats obtenus à ceux produits par les formules attendues. On vérifie pour toutes les mensualités et non pas seulement pour les 5 premières lignes (l'intérêt du tableur est là).

Le verdict est alors sans appel ; cela « marche » pour le calcul du capital amorti mais pas pour le capital restant dû. Il est important ici d'insister sur le fait suivant : un contre-exemple suffit à invalider l'hypothèse pour le calcul du capital restant dû mais pour être certain que la formule est correcte pour le capital amorti il faudrait pouvoir le démontrer dans tous les cas.

Simulation sur un « grand » nombre de cas

La démonstration est un peu difficile en STG. Alors comment pourrait-on s'assurer que cela reste vrai dans un grand nombre de cas (à défaut de le faire pour tous les cas) ? Cela va permettre de montrer la puissance de l'outil tableur. On peut en quelques secondes relancer les calculs pour des montants et des taux différents. On n'a pas prouvé la conjecture mais il semble bien qu'elle reste vraie dans « tous » les cas.

Démonstration de la conjecture

Dans des filières plus scientifiques (S ou ES), la conjecture pourrait ensuite être démontrée, la démonstration se faisant en peu de lignes.

De l'intérêt de prendre en compte la parole des élèves

Laisser la parole aux élèves a rendu ce cours plus dynamique. Une simple remarque d'élève a permis d'enrichir un TP, qui n'était au départ qu'une application du cours. Au-delà du tableau d'amortissement, les élèves ont été engagés dans une démarche scientifique : conjecturer, argumenter, mettre en évidence un contre-exemple, simuler, entrevoir la nécessité d'une démonstration.

Une conclusion plus générale : réinvestir les connaissances sur les suites géométriques

Autour de ce même exemple et maintenant que j'ai appris (grâce à ces deux élèves) que le capital amorti était une suite géométrique, je me dis que ce même TP peut être réinvesti sous différentes formes et à différents niveaux :

- Avec des élèves qui n'auraient pas eu de cours de mathématiques financières, on pourrait faire construire le tableau puis faire calculer $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ et $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ pour conjecturer que le capital amorti (e_n) semble être une suite géométrique mais qu'il est au contraire sûr que le capital restant dû (f_n) n'en est pas une (travail sur le contre-exemple).
- Une fois admis ou démontré que le capital amorti est une suite géométrique de raison $1+p$ ($p=0,004$ dans l'exemple traité), on peut alors prolonger le TP en cours pour utiliser les for-

mules de calcul permettant d'obtenir le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite géométrique ou la somme des n premiers termes. Sur cet exemple, ces formules prennent tout leur intérêt. On peut demander le capital amorti à la 5^{ème} mensualité puis à la $n^{\text{ème}}$: un calcul direct est possible alors que les formules que j'attendais au départ ne le permettaient pas. De même, on peut calculer la somme totale amortie au bout de 5 mensualités, ou bout de n mensualités.

- D'autres problèmes d'amortissement peuvent ensuite être proposés. On peut demander de trouver le montant de la mensualité, voire le nombre de mensualités nécessaires pour amortir le capital si on dispose des log ou par essais/rectifications, ce qui dépend des sections.

Coup de cœur... pour une blague

En matière d'histoires drôles, Internet est le vecteur du pire comme du meilleur. Celle-ci, qui est peut-être déjà passée dans vos boîtes mail, a bien plu à la rédaction de PLOT.

En voyant la foule de gens, Jésus alla sur la montagne. Et lorsqu'il fut assis, les douze vinrent à lui. Il leva les yeux sur ses disciples et dit :

« *Bienheureux les pauvres en esprit car le royaume des cieux leur appartient.*

Bienheureux ceux qui souffrent car ils seront consolés.

Bienheureux les doux car ils posséderont la terre... »

Quand Jésus eut terminé, Simon-Pierre dit : « *Il fallait écrire ?* »

Puis André demanda : « *Est-ce qu'on doit apprendre tout ça ?* »

Et Jacques : « *Il faut le savoir par cœur ?* »

Philippe ajouta : « *C'est trop dur !* »

Jean dit : « *J'ai pas de feuille !* »

Et Thomas ajouta : « *Moi, j'ai plus d'encre dans mon stylo !* »

Inquiet, Barthélemy demanda : « *Y aura interro ?* »

Et Marc interrogea : « *Comment ça s'écrit "bienheureux" ?* »

Matthieu se leva et quitta la montagne sans attendre et disant : « *Je peux aller aux toilettes ?* »

Simon précisa : « *Ca va sonner.* »

Et Judas dit enfin : « *Vous avez dit quoi après pauvres ?* »

Alors, un Grand Prêtre du Temple s'approcha de Jésus et dit :

« - *Quelle était ta problématique de départ ?*

- *Quels étaient tes objectifs transversaux ?*

- *A quelle compétence faisais-tu appel ?*

- *Pourquoi ne pas avoir mis les apôtres en activité de groupe ?*

- *Pourquoi cette pédagogie frontale ? Était-elle la plus appropriée ?* »

Alors, Jésus s'assit et pleura.