Un vade-mecum sur la logique

Lise Malrieu et Henry Plane

Chers collègues,
Avec le retour en force de la logique dans les programmes de lycée (et la pérennisation annoncée du programme de 2[nde] *2009), il nous est indispensable d'avoir les idées claires sur les différents types de raisonnement.*
Jeune enseignante, j'ai donc demandé à Henry, un vieux brisquard du métier qui a connu les heures de gloire de la logique, de nous rafraîchir la mémoire sur la structure des théorèmes mathématiques… derrière laquelle se cache la compréhension des principaux types de raisonnement travaillés au lycée : par contraposée, par l'absurde, par condition nécessaire et condition suffisante.

Voici un extrait du programme 2009, résumant les principales attentes :

> **Pour ce qui concerne le raisonnement logique**, les élèves sont entraînés, sur des exemples :
> 1) à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
> 2) à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
> 3) à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
> 4) à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
> 5) à formuler la négation d'une proposition ;
> 6) à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
> 7) à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Ce vademecum, concocté par Henry Plane, se concentre sur les points 3), 4) et 7). A lire et relire !

Il s'agit, ici, de proposer un accord sur des notions simples de raisonnement, notions pouvant être présentées puis répétées au cours des classes de lycée en jouant sur des exemples simples.

Un théorème ?
Lorsque, après avoir été objet de recherche, une proposition, une conjecture, devient le résultat d'une démonstration, elle reçoit le titre de « **théorème** ». Sa forme la plus générale est un lien entre trois propriétés : parmi les êtres possédant la propriété ($\mathcal{P}$), ceux qui possèdent en outre la propriété ($\mathcal{Q}$), possèdent également la propriété ($\mathcal{R}$).

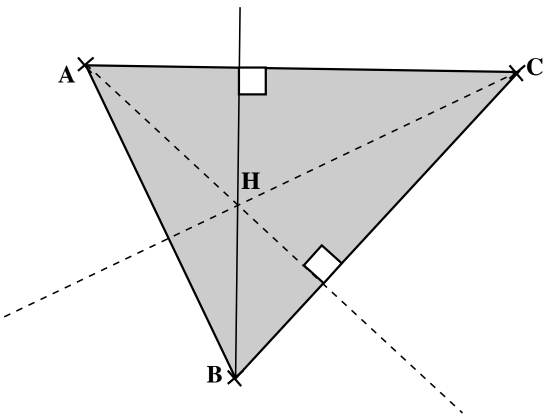
Ainsi :
- si un nombre est le produit de deux entiers ($\mathcal{P}$) et si ceux-ci sont impairs ($\mathcal{Q}$), il est également impair ($\mathcal{R}$).
- si, dans un intervalle, une fonction d'une variable admet une fonction dérivée ($\mathcal{P}$) et est strictement croissante ($\mathcal{Q}$), cette dérivée est positive ($\mathcal{R}$).
- une droite L est parallèle à une droite D_1 ($\mathcal{P}$) et à une droite D_2 ($\mathcal{Q}$), alors D_1 et D_2 sont parallèles ($\mathcal{R}$).

Mais souvent ($\mathcal{P}$) a la forme d'une définition antérieurement donnée :
- dans un parallélogramme ($\mathcal{P}$) dont les diagonales sont égales ($\mathcal{Q}$), les côtés sont orthogonaux ($\mathcal{R}$).

Parfois même, ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) sont incluses dans une même seule définition : dans un rectangle – parallélogramme ($\mathcal{P}$) et angles droits ($\mathcal{Q}$) – les diagonales sont égales ($\mathcal{R}$).

Polis par les âges, les énoncés des théorèmes cachent parfois, à première vue, les propriétés mises en jeu. L'initié devra y retrouver hypothèses (ou prémisses) ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) ainsi que la conclusion ($\mathcal{R}$).
Dans « Les hauteurs d'un triangle sont concourantes », il y a :

($\mathcal{P}$) : un triangle ABC,
($\mathcal{Q}$) : les hauteurs issues de A et B se coupent en H,
alors la droite (CH) porte la hauteur issue de C : ($\mathcal{R}$).



Pour le malheur de l'apprenti, cet usage de l'ellipse de langage résume à l'excès l'énoncé d'un théorème à une expression, voire à un nom : un losange, le barycentre, le théorème des valeurs intermédiaires, la figure de Thalès, le cercle d'Euler…
Il sera intéressant d'y faire identifier ($\mathcal{P}$), ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{R}$).

Cet exercice assez formel sera cependant très utile pour faire assimiler à nos élèves les notions de « contraposée » et « réciproque ».

À tout théorème du type « ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) impliquent ($\mathcal{R}$) », qualifié pour la circonstance de « **direct** », est associée la notion de « **théorème contraposé** ».
On a ($\mathcal{P}$), mais si ($\mathcal{R}$) peut être nié, si on a (non $\mathcal{R}$), que peut-on dire ?
La réponse est ($\mathcal{Q}$) ne peut être. On a (non $\mathcal{Q}$).
En effet, si ($\mathcal{Q}$) était vrai, on aurait à la fois (non $\mathcal{R}$) et, par le théorème direct ($\mathcal{R}$), ce qui ne peut être (à notre niveau, il ne peut être question que de logique binaire).
« Un triangle isocèle possède deux bissectrices égales » implique la contraposée : « Si, dans un triangle, il n'y a pas deux bissectrices égales, il ne peut être isocèle ».

Bien sûr, nous nous garderons en classe de toute théorie générale et nous nous appuierons uniquement sur des exemples pour faire comprendre cette notion. Remarquons qu'ici, un travail préliminaire sur la négation prend tout son sens : « expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions : par exemple, écrire l'événement contraire de « tous les murs de la pièce sont blancs » ou encore « le temps est chaud et humide ». Ce type d'exercice, nouveau et délicat, pourra faire l'objet d'un entraînement tout au long de l'année. »
(Cf « Ressources pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques »).

Euclide a usé du procédé qui est nommé « **démonstration par l'absurde** ». Ainsi, livre VII, proposition 23 : si deux nom-

bres sont premiers entre eux ($\mathcal{P}$) et si un troisième divise l'un d'eux ($\mathcal{Q}$), celui-ci est premier avec l'autre ($\mathcal{R}$). Euclide démontre que si on a ($\mathcal{Q}$) et (non $\mathcal{R}$), alors on a (non $\mathcal{P}$).
Il faut en effet bien comprendre que (négation de $\mathcal{R}$), c'est-à-dire celle du couple ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) entraîne (négation de $\mathcal{P}$) **ou** (négation de $\mathcal{Q}$). Ici, **ou** doit être pris au sens large, les deux pouvant être simultanément vérifiés.

L'usage du théorème contraposé apparaît comme un complément logique sans réclamer une démonstration particulière. Il est bon, sur ce point important en science, d'insister tôt avec des exemples simples. Ainsi, avec les hauteurs du triangle ABC, si la droite (HC) ne porte pas la hauteur issue de C, alors ou la droite (AH) ou la droite (BH) ou les deux ne portent pas de hauteur(s). De même, si le produit de deux entiers est pair, l'un des deux ou les deux sont pairs.

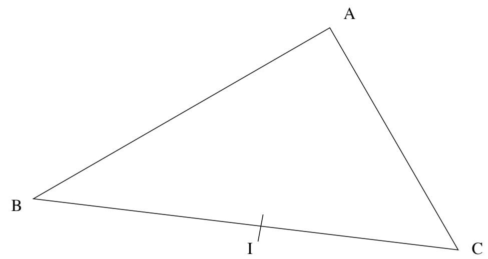
Il n'en va pas de même avec le « **théorème réciproque** ». À côté de « le couple ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) entraîne ($\mathcal{R}$) », on peut —on doit— se poser la question « le couple ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$) entraîne-t-il ($\mathcal{Q}$) ?
Cela ne relève pas de l'évidence. Il faut impérativement en rendre conscient le débutant. L'étude de cette réciproque nécessite une démonstration propre qui est parfois plus délicate, voire d'un autre ordre que celle du théorème direct. Ainsi, parmi les exemples précédents :

- Si, dans un intervalle, une fonction admet une fonction dérivée ($\mathcal{P}$) qui soit positive ($\mathcal{R}$), cette fonction est-elle croissante ?
- Si, dans un triangle ($\mathcal{P}$), deux bissectrices sont égales ($\mathcal{R}$), le triangle est-il isocèle ?

Lorsque théorème direct et théorème réciproque ont été, tous les deux, démontrés : « ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) entraînent ($\mathcal{R}$) » et « ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{R}$) entraînent ($\mathcal{Q}$) », il est dit qu'il y a « équivalence » entre ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{R}$) par rapport à ($\mathcal{P}$).
C'est ainsi qu'on peut définir un rectangle comme un parallélogramme ayant un angle droit ou des diagonales égales.

Mais attention… Le théorème « ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) entraînent ($\mathcal{R}$) » ne pose pas qu'un seul problème réciproque. Ce sont deux théorèmes qu'il convient de bien relever assez souvent. ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{R}$) entraînent-ils ($\mathcal{Q}$) ? Mais aussi : ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{R}$) entraînent-ils ($\mathcal{P}$) ?

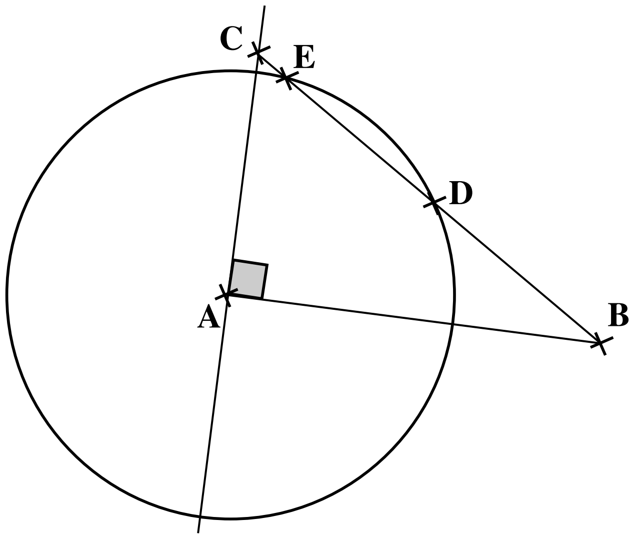
Un bel exemple nous est fourni par la propriété due à Thalès et résumée par : « Un angle droit est inscrit dans un demi-cercle ».
Soient donc un triangle ABC et I le milieu de [BC].
($\mathcal{P}$) : I milieu de [BC],
($\mathcal{Q}$) : BC = 2 AI, où I est un point de [BC],
($\mathcal{R}$) : $\widehat{BAC}$ est droit.



Avec ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$), théorème direct : un triangle dont la médiane [AI] est moitié du côté [BC] est rectangle en A. ($\mathcal{R}$)
Avec ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{R}$), première réciproque : dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le double de la médiane correspondante. ($\mathcal{Q}$)
Avec ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{R}$) toujours, autre formulation de la première réciproque : dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit. ($\mathcal{Q}$)

Avec ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{R}$), seconde réciproque : dans un triangle rectangle en A, si un point I de [BC] vérifie BC = 2AI, alors I est le milieu de [BC]. ($\mathcal{P}$)

Mais attention ! Celle-ci est fausse ! Voyez la figure ci-dessous pour vous en convaincre : I n'est pas nécessairement le milieu de [BC]. Le cercle de centre A et de rayon BC/2 peut, dans certains cas, couper [BC] en deux points.



Une situation aussi riche (deux réciproques), ne se présente pas toujours du premier coup. L'apprenti devra y veiller… et il faudra le guider. C'est, au fond, une situation analogue à celle présente dans : démontrer que trois points sont alignés. Faut-il montrer que A est sur (BC), ou B sur (CA) ou C sur (AB) ?

Ce n'est qu'après avoir, comme dans ces réflexions, relevé quelques schémas de raisonnement logique et assimilé les notions de négation, contraposition, réciproque, que les formulations de **condition nécessaire** et de **condition suffisante** peuvent prendre place.

Le document d'accompagnement « Ressources pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques » précise : « Les notions de condition nécessaire et condition suffisante sont difficiles pour les élèves de seconde ; il s'agit dans un premier temps de revoir des propriétés ou théorèmes étudiés au collège afin de travailler les notions de condition nécessaire et condition suffisante dans un contexte mathématique connu. ».

On peut, ici, regretter que l'étude de lieux géométriques —on a dit : « ensemble de points »— ne joue plus dans les programmes le rôle qui fut le sien grâce à la double recherche, les points et rien qu'eux, qu'elle nécessitait.
Toutefois, le document précise : « L'étude de problèmes d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle ou d'un polygone (…) » peut fournir « l'occasion de travailler les conditions suffisantes. »