Une situation pour introduire les fonctions

Véronique Cerclé

Cet article complète l'article du même auteur « Un puzzle de Lewis Carroll » paru dans PLOT 29 page 12.

Introduction

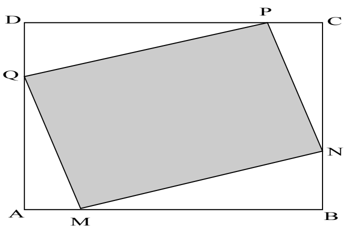
Je vais présenter ici une situation classique : la situation du quadrilatère tournant. J'en propose un scénario, racontant le travail fait autour de cette situation dans mes classes. Il s'agit de classes de Seconde, mais avec les nouveaux programmes, cette activité est tout à fait exploitable en Troisième.

Le premier objectif de cet article est de proposer un beau problème d'introduction aux fonctions. D'une part il met en jeu de nombreuses compétences (compétences de base : démontrer, calculer une aire, organiser un calcul numérique ou littéral, mais aussi des compétences évoluées : poser x = ... et calculer $f(x)$). D'autre part il met en place les objets et les questions abordés par les fonctions.

Un deuxième objectif est de montrer à travers les réflexions des élèves que la façon dont ce problème est habituellement traité passe sous silence un long travail préliminaire d'appropriation.

Enfin, j'espère aussi montrer qu'il n'est finalement pas difficile de faire réfléchir et débattre les élèves : il suffit souvent de prendre les beaux problèmes des manuels, et d'en supprimer les questions !

Énoncé : tracer un rectangle ABCD avec AB = 8 cm et AD = 5 cm.
Placer sur [AB] un point M.
Placer alors N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] de sorte que AM = BN = CP = DQ.
On va s'intéresser à l'aire du quadrilatère MNPQ.



Durée : ¼ h présentation + 4 heures

Organisation : Il s'agit d'un travail mené en classe entière, sur des séances consécutives. Les questions ne sont pas distribuées à l'avance aux élèves, elles seront posées au fur et à mesure de leur avancement et de leurs prises de conscience progressives. Ainsi le scénario alterne les phases de recherche individuelle et les phases de synthèse collective. On retrouve cette alternance sur le cahier, entre les recherches personnelles et les prises de notes.

Présentation

Les élèves écrivent l'énoncé, font la figure. Ils voient tout de suite que MNPQ est un parallélogramme. D'où la première question notée au tableau : *MNPQ est-il bien un parallélogramme ?* à laquelle j'ajoute la mienne : *Avons-nous tous la même aire ?*

1ère heure : comment calculer l'aire de MNPQ ?

Question : pourquoi MNPQ est-il bien un parallélogramme ?

La confirmation que MNPQ doit former un parallélogramme permet à certains de rectifier leur figure. Pendant ce temps, les autres cherchent des pistes de démonstration. La synthèse collective est l'occasion de rappeler les différentes méthodes pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, de rappeler qu'une méthode suffit, et qu'il faut chercher celle qui s'adapte le mieux à la situation.

Ici on reconnaît des côtés opposés égaux en mettant en évidence les triangles rec-

tangles identiques qui les sous-tendent.
Prise de note *: MNPQ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont les hypoténuses de triangles rectangles identiques et ont donc la même longueur*.

Question : avons-nous tous la même aire pour MNPQ ?
Je laisse chacun calculer son aire, et puis je relève des valeurs obtenues par les élèves ; elles sont différentes : pourquoi ? Certains soulèvent qu'on n'a pas tous placé M au même endroit : on va donc déjà s'intéresser à ceux qui ont placé M au même endroit, par exemple AM = 2.

Question : calcul de l'aire pour AM = 2 ?
Tous tracent le quadrilatère correspondant, et calculent son aire. Le relevé donne là aussi des résultats différents : la plupart des élèves ayant évidemment calculé l'aire en multipliant les deux côtés, le détail de leurs calculs montre que leurs différences de résultats viennent d'abord des différences de mesures des longueurs de ces côtés. On se met alors d'accord en calculant ces longueurs avec l'égalité de Pythagore, et leur produit donne une « aire » de $\sqrt{13} \times \sqrt{40} = \sqrt{520}$, soit environ 22,8 cm².
Il s'agit maintenant de leur faire prendre conscience de leur erreur. On peut espérer qu'un(e) élève aura trouvé une réponse différente en soustrayant à l'aire du rectangle de 8 cm sur 5 cm l'aire des 4 triangles rectangles (il semble que le fait d'avoir colorié les quatre triangles rectangles pour la démonstration du parallélogramme peut en avoir amené certains à procéder de cette façon ; en tout cas, ça a toujours été le cas dans mes classes). L'élève expose sa méthode… qui donne 22 au lieu de 22,8 !
NB : Si aucun élève ne propose cette méthode, on peut essayer de les y amener, ou on peut aussi utiliser un logiciel de géométrie qui donnera une aire égale à 22 cm².
Je les interroge alors : « pourquoi les deux méthodes donnent-elles des résultats différents ? ». J'attends évidemment que certains expliquent pourquoi la 1ère est incorrecte ! La formule émerge alors des souvenirs : « l'aire c'est base fois hauteur, mais pas côté fois côté ! »

2ème heure : les aires varient en fonction de la longueur AM.

Question : calcul de l'aire correspondant à une autre position de M.
Chaque élève calcule son aire, pour sa position de M. On constate alors que les aires varient.
Prise de note : *les parallélogrammes MNPQ n'ont pas tous la même aire ; cette aire dépend de la valeur choisie pour AM*.

Question : quelle est la plus grande aire possible ? la plus petite ?
Les élèves trouvent assez rapidement que l'aire maximale est de 40 cm² pour AM = 0 : en fait ils proposent AM = 0,01 cm puis AM = 0,001 cm, et constatent que plus on s'approche de 0, plus l'aire augmente vers 40 cm², mais ils ont du mal à accepter la valeur limite AM = 0. Le dessin dans le cas où AM = 0, avec M confondu avec A et MNPQ avec ABCD permet de rassurer les derniers sceptiques.
Prise de note : *l'aire maximale est de 40 cm², obtenue lorsque AM = 0*.

3ème heure : formule exprimant l'aire en fonction de x = AM.

Question : quelle est l'aire minimale ?
Je lance ce défi à la classe ; les élèves se mettent alors à calculer des aires dans le but de trouver la plus petite.
Ils ont vite remarqué qu'on pouvait remplacer les quatre triangles rectangles par deux rectangles, ce qui simplifie les calculs. On constate aussi que l'autre position limite, correspondant à AM = 5 (N et Q étant alors confondus avec C et A), ne donne malheureusement pas l'aire minimale !

Lorsque les élèves ont fait un certain nombre de calculs, il faut les arrêter pour observer ce qu'il se passe (on peut avoir préparé au rétroprojecteur ou au vidéo-projecteur les calculs faits pour AM = 2, AM = 3, AM = 4). On remarque qu'on fait toujours la même chose.

Je propose alors l'idée d'automatiser le calcul : comment faire pour effectuer le calcul en une fois pour toutes les valeurs de AM possibles ? Les élèves suggèrent d'utiliser une lettre (x) : on pose AM = x et on obtient la formule suivante :
Aire $= 40 – [x(8-x) + x(5-x)]$

Question : simplifier cette formule.
Certains élèves peuvent proposer de transformer cette formule pour la simplifier. Ce calcul donne l'occasion de faire un peu de calcul littéral en situation, profitons-en ! On pourra faire remarquer que l'on gagne en simplicité (formule plus courte), mais qu'on perd en transparence : on ne lit plus dans la formule développée les aires utilisées, au contraire on y voit $2x^2$ (mais où sont les deux carrés de côté x ?) et $13x$ (que représentent concrètement ces $13x$?).
Prise de note : *on obtient une fonction définie sur* $[0 ; 5]$ *où* x = *AM et* $f(x)$ = *aire de MNPQ* $= 2x^2 - 13x + 40$.

4ème heure : graphique.

Question : Comment exploiter notre travail pour trouver le minimum ?
Les élèves ont souvent l'idée d'exploiter les données obtenues en construisant un graphique. Se pose la question de comment joindre les points déjà placés : il faut avoir plus de points. On peut alors par exemple observer la trace obtenue avec un logiciel de géométrie lorsqu'on déplace M, et en modifiant successivement le pas. On peut aussi par exemple écrire un algorithme qui trace « point par point » la courbe, avec un pas choisi.

Quoi qu'il en soit le minimum reste opaque, la courbe semblant « plate » autour de son minimum.

Prise de note : *Conclusion : ce problème pose la question de la recherche d'un minimum d'une fonction. Les outils pour répondre à cette question sont un des objectifs de l'année.*

Remarque : plutôt que l'aire minimale, on peut poser la question : « Est-il possible que MNPQ ait pour aire 23,08 cm² ? ». En effet, on peut répondre à cette question à ce moment-là de l'année ; celui qui trouve la réponse est fier. On peut alors utiliser le graphique pour vérifier que la recherche de l'aire minimale pose le problème de l'allure de la parabole autour de son minimum et qu'on ne peut pas y répondre de façon convaincante à ce moment de l'année.

Une conclusion

La première question de l'énoncé trouvé dans les manuels se présente souvent ainsi :
a) on pose x = AM ; montrer que $f(x) = 2x^2 - 13x + 40$.
En posant cette question, on fait comme s'il était évident que l'aire varie, comme s'il était naturel de trouver une formule pour la calculer, et comme si on devait faire cela avant même de s'être posé la moindre question quant à cette figure !
Comment ces élèves prendront-ils un jour l'initiative de « poser x = … » et de chercher la formule qui mathématisera le problème ?

Plus généralement, lorsque je trouve de beaux problèmes dans des manuels, je constate que l'énoncé commence souvent au-delà de ce qui pose question. Autrement dit, on fait travailler l'élève sur une situation dont il n'a pas compris les enjeux. Pire, souvent ils ne voient pas où est le problème dans le problème posé !