Un puzzle de Lewis Carroll

Véronique Cerclé

Voici un article extrêmement éclairant. Pas tant à cause de l' intérêt mathématique de la situation présentée : le paradoxe connu du « 64 = 65 ». Mais parce qu'il est une excellente démonstration de notre tendance à gâcher parfois maladroitement nos plus belles pépites. Parce que l'on veut aller trop vite, parce qu'il y a souvent un décalage entre nos attentes et les connaissances réelles des élèves, parce que nous avons une forte tendance à faire travailler sur les réponses avant même que les questions ne se soient posées dans la tête de l'élève. Cet exemple vécu plaide de façon lumineuse en faveur d'un enseignement qui laisse à l'élève le temps de s'approprier le problème posé, condition nécessaire pour pouvoir l'apprécier.

Ce puzzle paradoxal « montre » la transformation d'un carré d'aire 64 en un rectangle d'aire 65 (voir, par exemple, « Jeux 8 », brochure n° 185 éditée par l'APMEP).

Une situation - problème sur l'alignement de points

Je vais présenter ici une situation classique : la situation du puzzle de Lewis Carroll. Mais j'en présente ici un traitement en classe un peu différent de celui proposé dans les manuels : j'essaie de la rendre plus riche, motivante, de façon à poser question, faire réfléchir et débattre les élèves.

Et je rejoins là les axes essentiels des nouveaux programmes : entrer par les problèmes, et faire entrer les élèves dans les problèmes !

J'en propose un scénario racontant le travail fait autour de cette situation dans mes classes. Il s'agit de classes de Seconde, mais avec les nouveaux programmes, cette activité est tout à fait exploitable en Troisième.

Le premier objectif de cet article est de proposer un intéressant problème d'alignement de points : d'une part parce qu'il attise la curiosité des élèves par le paradoxe qu'il soulève (64 = 65), d'autre part parce qu'il peut se résoudre par de nombreuses méthodes.

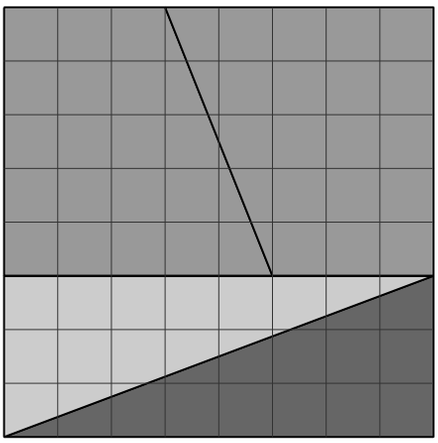
Un deuxième objectif est de montrer à travers les réflexions des élèves que la façon dont ce problème est habituellement traité, dans les manuels notamment, passe sous silence le long travail préliminaire d'appropriation du problème.

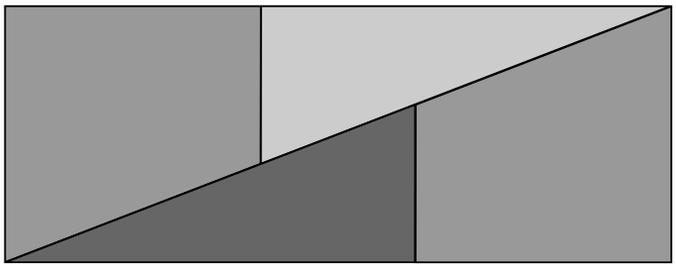
Enfin, j'espère aussi montrer qu'il n'est finalement pas difficile de faire réfléchir et débattre les élèves : il suffit souvent de prendre les beaux problèmes des manuels… et d'en supprimer les questions !

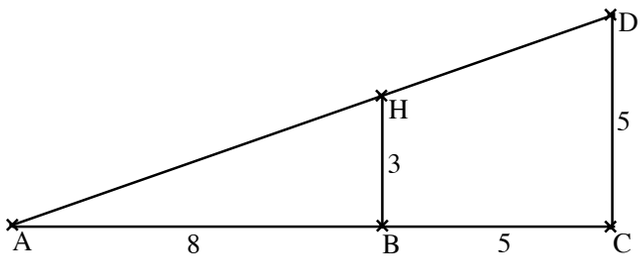
Objectif lié à la leçon : utiliser les vecteurs colinéaires.
Autres objectifs : résoudre un problème par différentes méthodes, éveiller une curiosité culturelle et éventuellement proposer une démonstration par l'absurde.
Pré-requis : des outils de 3ème (Thalès) ; lien entre vecteurs colinéaires et points alignés.
Déroulement : 1 heure
Énoncé : Le puzzle de Lewis Carroll.

Travail sur Lewis Carroll

Question : « qui est Lewis Carroll ? »
Vidéoprojection d'une page sur Lewis Carroll.







Travail sur le puzzle

Consignes : « Sortez votre puzzle et reconstituez le carré ». Puis : « Reconstituez-le maintenant en rectangle ». Cette étape est souvent plus longue que prévu : faire un rectangle avec ces quatre pièces constitue une difficulté pour les élèves.

Lorsque la majorité a réussi, projeter le carré et le rectangle et démarrer un questionnement oral.

Lewis Carroll aime les situations étranges, paradoxales, qui heurtent notre logique : en quoi ce puzzle est-il paradoxal ?

Pour aider les élèves, noter les dimensions de ces deux figures. Un élève va dire « ce n'est pas possible : le carré fait 64 cm² et le rectangle 65 cm² ! ».

Écrire 64 = 65 ?

Travail sur les aires

Certains élèves ne sont pas surpris : les pièces ayant été déplacées, l'aire peut changer. Un élève m'a même expliqué qu'il a le même problème avec sa valise : selon la façon dont ils sont pliés, les habits ne prennent pas la même place ! La notion de conservation de l'aire semblant peu assurée chez ces élèves, on calcule ensemble l'aire de chaque pièce : le total est bien 64 et non 65 ; d'où sort le cm² supplémentaire ?

Travail avec « Thalès »

Question : « Observez la figure : quelle situation de référence y reconnaissez-vous ? ». On extrait le demi-rectangle, on nomme les points : les élèves écrivent alors le théorème de Thalès.

Amener les élèves à se souvenir de ce qu'on fait après : le produit en croix. Et là stupeur : on obtient cette fois 39 = 40 ! Comment « Thalès » peut-il lui aussi trahir notre confiance ?

Il faut maintenant s'interroger : pourquoi « Thalès » ne marche-t-il pas ici ? On rappelle alors les conditions d'application du théorème de Thalès.

Les droites sont-elles parallèles ?

- oui avec justification.

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

- oui avec justification.

Les points A, H, D sont-ils alignés ? D'où la question « Comment savoir si les points A, H, D sont alignés ? »

Travail sur l'alignement des points

De nombreuses méthodes sont possibles pour montrer le non-alignement des points A, H, D.

Méthode 1 : par l'absurde

Supposons que les points A, H, D soient alignés, le théorème de Thalès s'applique-

rait alors mais conduirait à l'égalité 39 = 40, qui est absurde ; les points ne peuvent donc pas être alignés.

Méthode 2 : les vecteurs colinéaires

Les dimensions du rectangle suggèrent des composantes naturelles pour : $\overline{AH}$ (8;3) et $\overline{HD}$ (5;2). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points ne sont pas alignés.

Autres méthodes

- Utiliser la trigonométrie pour calculer les angles.
- Calculer les équations des droites / fonctions affines.

Retour sur la figure et explication du paradoxe

Question : en quoi le fait que les points ne sont pas alignés résout-il le paradoxe ?

Débat, montrer la figure réelle en grand, avec le trou visible : on n'a pas vu l'espace car les points sont presque alignés, le trou est allongé le long de la ligne AD. Et notre cm² supplémentaire est l'aire du trou !

Prolongements possibles

Quelle est la forme du « trou » ? Le démontrer.

Nous n'avons pas vu le parallélogramme car il est trop plat : qu'est-ce qui fait qu'un parallélogramme est plat ou non ? (Montrer le parallélogramme articulé) Quelle est la hauteur de ce parallélogramme ?

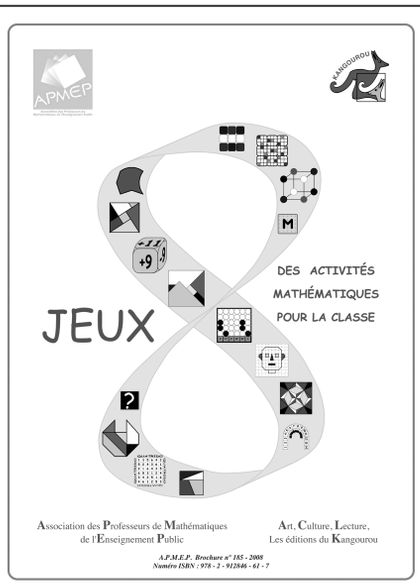
Une conclusion

La façon dont ce problème est posé dans les manuels prend comme pré-requis implicite le principe de conservation des aires. Il pose d'entrée que la figure amène à écrire 64 = 65, et déroule ses questions pour faire lever le paradoxe.

Or, je constate tous les ans que pour de nombreux élèves, ce principe n'est absolument pas naturel. L'énoncé commence ainsi au-delà de ce qui pose question. Autrement dit, on fait travailler l'élève sur une situation dont il n'a pas compris les enjeux. Pire, souvent il ne voit pas où est le problème dans le problème posé !

Enfin, n'ayant pas été confronté de près au paradoxe, l'élève ne s'y sent pas vraiment impliqué.

Il me semble que c'est la manipulation du puzzle et la découverte **par les élèves** du paradoxe qui rendent tout son intérêt à ce problème.



La brochure « JEUX 8 », réalisée par le groupe « Jeux » de l'APMEP, consacre une vingtaine de pages aux puzzles paradoxaux, dont le puzzle de Lewis Caroll. Ce sont neuf activités « clés en main » et sept autres puzzles paradoxaux pouvant donner lieu à d'autres moments de recherche avec vos élèves.