π/2 ou π/3 ?

Henry Plane

Enfin un article pour les adeptes de géométrie euclidienne plane, à l'heure où de sombres menaces pèsent sur elle ! Apprécions ensemble ces démonstrations élégantes de relations dans le triangle où l'angle $\pi/3$ joue enfin le rôle central qui lui a été usurpé par le terrible angle $\pi/2$ et ses démonstrations quadratiques.

Remarque : dans tout cet article, nous noterons (ABCD) l'aire d'un quadrilatère plan ABCD et (ABC) l'aire du triangle ABC.

Introduction

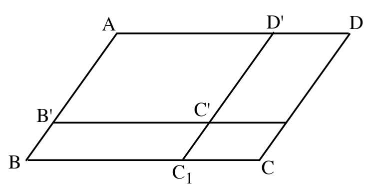
À partir d'un segment de droite il est simple, au compas, de construire un triangle équilatéral.

Il s'ensuit qu'il est plus facile (et plus précis) d'avoir un angle « tiers de plat » : $\frac{\pi}{3}$ qu'un angle « moitié de plat » : $\frac{\pi}{2}$. Sortons de l'ombre ce triangle ayant un angle de $\frac{\pi}{3}$ car, finalement, n'aurait-on pas excessivement privilégié le triangle rectangle ?

I. Et d'abord quelques rappels, quelques outils.

Dans la première traduction française de Henrion vers 1620 du livre 6 d'Euclide, Théorème 17, nous pouvons lire :

« *les parallélogrammes équiangles sont l'un à l'autre en la raison composée de celle de leurs côtés* ».



On a : $(ABCD) = \dfrac{AD}{AD'}\,(ABC_1D')$

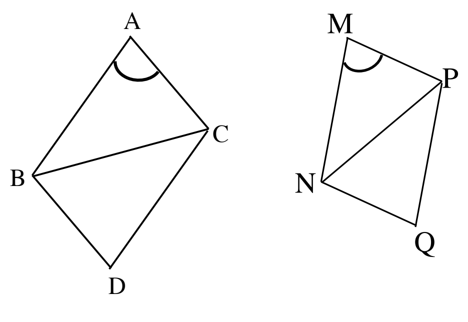
De même $(ABC_1D') = \dfrac{AB}{AB'}\,(AB'C'D')$.

Donc $(ABCD) = \dfrac{AD}{AD'} \times \dfrac{AB}{AB'}\,(AB'C'D')$.

Ainsi, le rapport des aires de deux parallélogrammes de mêmes angles est égal au produit des rapports des côtés homologues.

Notons bien en cela qu'aucune aire n'est évaluée.

Commandin (vers le milieu du 15ème siècle) fut le premier géomètre à remarquer que si deux triangles ont un même angle, ils peuvent être considérés comme moitiés de parallélogrammes équiangles.



Ainsi, pour deux triangles ABC et MNP tels que $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$, on associe au triangle ABC le parallélogramme ABDC et à MNP le parallélogramme MNQP.

$(ABC) = \frac{1}{2}$ (ABDC)

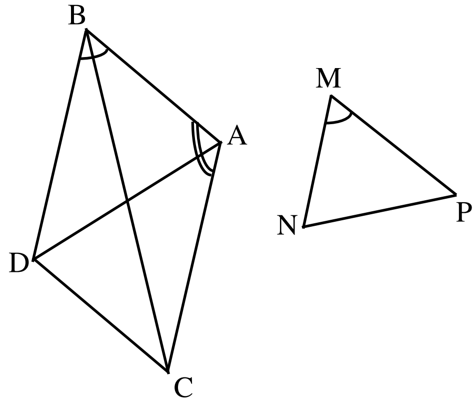
et $(MNP) = \frac{1}{2}$ (MNQP).

Les parallélogrammes ABDC et MNQP ayant les mêmes angles, on a donc :

$(ABDC) = \frac{AB}{MN} \times \frac{AC}{MP}$ (MNQP).

Il s'en suit :

$$\mathbf{(ABC) = \frac{AB}{MN} \times \frac{AC}{MP} \ (MNP).}$$



On remarquera d'autre part que cette propriété s'étend s'il s'agit de deux angles supplémentaires.

Ainsi, si $\widehat{BAC} + \widehat{NMP} = \pi$, le parallélogramme associé au triangle ABC est tel que $\widehat{DBA} + \widehat{BAC} = \pi$.

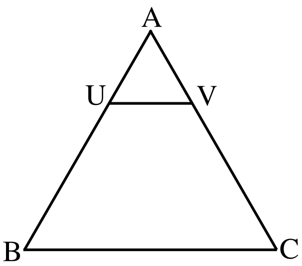
Par suite, $(BAD) = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{MN}} \times \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{MP}}$ (MNP).

Or $(BAD) = \frac{1}{2}$ (ABCD) = (ABC).

On retrouve alors l'égalité :

$$\mathbf{(ABC) = \frac{AB}{MN} \times \frac{BD}{MP} \ (MNP).}$$

II. Entrée en jeu des triangles équilatéraux (angles tous égaux à $\frac{\pi}{3}$)



Soient ABC un triangle équilatéral, U sur (AB) et V sur (AC) tels que AU = AV = 1 (unité de longueur).

On a alors :

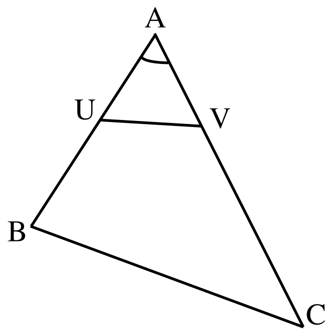
$(ABC) = \frac{AB}{AU} \times \frac{AC}{AV}$ (AUV).

Si on note k l'aire de (AUV) (quelle que soit sa valeur, peu importe ici…), on a :

$(ABC) = \frac{AB}{1} \times \frac{AC}{1} \times k = k\text{AB}^2$.

Il est prudent de lire « AB-deux » : il n'y a rien ici de quarré…

Que peut-on en déduire pour un triangle n'ayant qu'un seul angle de $\frac{\pi}{3}$?



Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

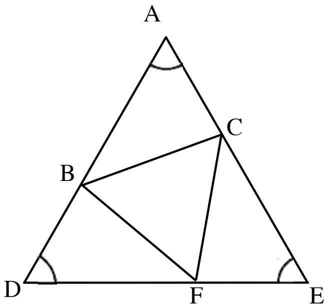
On fait apparaître en A le triangle équilatéral AUV dont les côtés sont unités de longueur.

Alors :

$(ABC) = \frac{AB}{AU} \times \frac{AC}{AV}$ (AUV).

(ABC) = AB . AC . *k*.

III. Relation entre les mesures des côtés d'un triangle ayant un angle de $\frac{\pi}{3}$



Supposons que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

On prolonge [AB] de la longueur BD égale à AC et [AC] de la longueur CE égale à AB.

On obtient alors un triangle ADE équilatéral.

Sur [DE], on place le point F tel que DF = AB

Donc FE = AC.

On obtient ainsi deux triangles DFB et EFC égaux à ABC et un autre triangle équilatéral BCF.

Alors (ADE) = (BCF) + 3(ABC).

Donc $k(AB + AC)^2 = k.BC^2 + 3k\,AB.AC$, en utilisant les propriétés vues au I et II.

Comme $k \neq 0$, il vient :

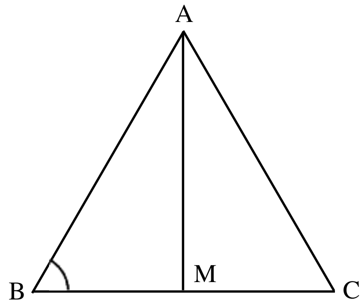
$(AB + AC)^2 = BC^2 + 3\,AB.AC$.

On effectue et on simplifie pour obtenir :

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC.}$$

En utilisant la propriété ci-dessus, on obtient le corollaire suivant :

Soit (AM) une médiane d'un triangle équilatéral ABC.



$$BM = MC = \frac{AB}{2} \text{ et } \widehat{ABM} = \frac{\pi}{3}.$$

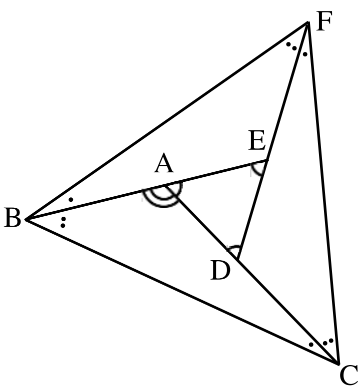
Ainsi $AM^2 = AB^2 + BM^2 - AB.BM$

$$AM^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} - \frac{AB.AB}{2}$$

$$AM^2 = \frac{3}{4}\,AB^2$$

$$\mathbf{AM^2 = 3\,BM^2.}$$

IV. Relation entre les mesures des côtés d'un triangle ayant un angle de $\frac{2\pi}{3}$



Supposons que $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

On trace une figure analogue au cas $\frac{\pi}{3}$: si AB < AC, on prend D sur [AC] tel que CD = AB et on prolonge [BA] de façon que BE = AC.

On poursuit la construction afin d'obtenir un triangle FBC équilatéral, ce que nous pouvons démontrer en remarquant que ADE est un triangle équilatéral que les triangles EFB et DFC sont égaux à ABC (car F, E et D sont alignés).

$$\widehat{FBC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Donc : (FBC) = (ADE) + 3 (ABC)

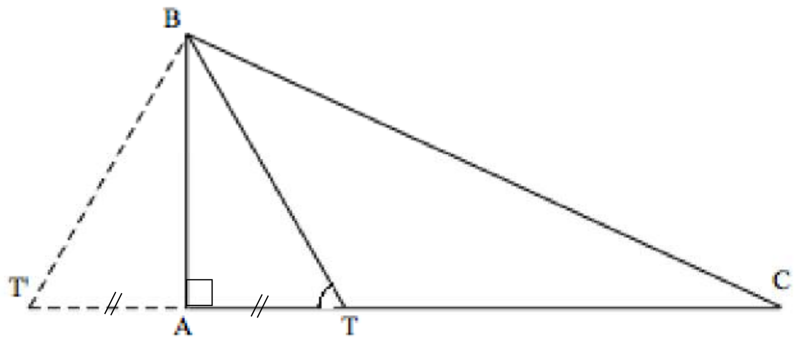
Soit : $k.BC^2 = k\,(AC - AB)^2 + 3k\,AB.AC$

De même, après simplification par $k \neq 0$:

$BC^2 = (AC - AB)^2 + 3\,AB.AC$

Soit : $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 + AB.AC}$

V. On en déduira une autre relation pour un triangle ABC dont $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$…



$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$ donc un des angles aigus est supérieur à $\frac{\pi}{4}$ donc à $\frac{\pi}{6}$ (par exemple $\widehat{ABC}$).

Il existe donc T sur [AC] pour former un triangle équilatéral BTT' avec A milieu de [TT'], (BA) est donc la médiatrice de [TT'].

Il vient donc : $BA^2 = 3\,AT^2$ (d'après le corollaire du III)

$BC^2 = TB^2 + TC^2 + TB.TC$ (d'après IV)

$= 4\,TA^2 + (AC - TA)^2 + 2\,TA\,(AC - TA)$

$= 4\,TA^2 + AC^2 + TA^2 - 2\,TA.AC$

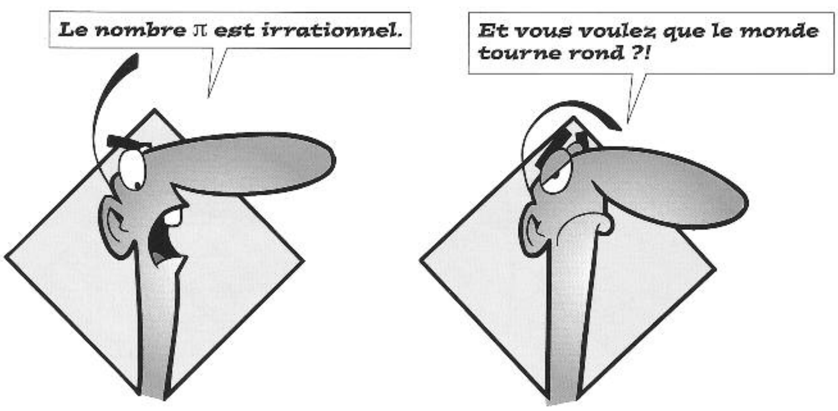
$\quad + 2\,TA.AC - 2\,TA^2$

$= 3\,TA^2 + AC^2$.

On obtient finalement :

$$\mathbf{BC^2 = BA^2 + AC^2}$$

Ce n'est donc pas un, mais trois théorèmes qui étaient enfouis à Samos… et sans trace de carrés !



Ce dessin, ainsi que celui de la page 7 sont tirés de « 0 % de matière grise » avec l'aimable autorisation de Francis Casiro et des Éditions Pole.