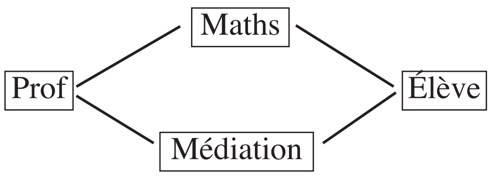
# Quelques illusions à perdre

André Deledicq

*André Deledicq, président de l'association Kangourou Sans Frontières, Prix Erdös 2004, Prix d'Alembert 1994, ancien directeur d'IREM, ancien chef de mission à la formation, est auteur de nombreux livres et manuels.*
*Le texte suivant résume le contenu d'une conférence prononcée le 29 août 2008 à l'université d'été de Saint-Flour. Merci à Claudie Asselain-Missenard pour les corrections et compléments qu'elle m'a suggérés dans cette rédaction.*

Acceptons, un instant, de regarder schématiquement le processus d'enseignement comme un système à quatre composantes : aux deux bouts, *le prof* et *l'élève*, reliés par l'objet de leur rencontre, les *mathématiques*, et par les moyens de *médiation* de cette rencontre,




Pour chacun de ces angles d'approche, nous avons choisi d'évoquer deux illusions courantes auxquelles les jeunes professeurs, et certains de ceux qui le sont restés, croient parfois de bonne foi.
Mon expérience est cependant qu'il vaut mieux perdre ces illusions lorsqu'on tente d'enseigner quelques mathématiques.

## La médiation

***Illusion 1* : On peut inculquer des connaissances !**
***Contre-pied :*** …à condition que l'élève le veuille bien.
***Commentaire***
Citons simplement la *fable du cheval qui n'a pas soif,* joliment racontée dans *les dits de Mathieu* de Célestin Freinet :
« Mais par exemple ! Il se refuse à aller du côté de l'abreuvoir, depuis quand les bêtes commandent-elles ? »
Et l'homme enfonce brusquement les naseaux du cheval dans l'eau de l'abreuvoir.
– Tu vas boire, cette fois !
La bête renifle, mais ne boit pas …
[Arrive un paysan.]
« Ton cheval n'a pas soif, laisse-le donc manger son soûl de luzerne. Après, il aura soif, et tu le verras galoper à l'abreuvoir… Et quand il boira tu pourras toujours tirer sur sa longe… »

***Illusion 2* : Le savoir se transmet !**
***Contre-pied :*** …disons plutôt qu'il se construit dans la tête de chaque élève.
***Commentaire***
Les élèves eux-mêmes croient souvent qu'il suffit de « suivre un cours » pour que son contenu se déverse dans leur propre tête. Comme si l'on croyait qu'en achetant l'encyclopédie X ou Y, on deviendra un Pic de la Mirandole.
Cependant, les choses ne se passent pas comme avec une disquette ou une clé USB : il ne suffit pas de remplir une mémoire avec une autre. Non, le savoir ne se transmet pas, il se construit chez celui qui est censé l'apprendre. Le problème

principal c'est qu'on ne sait pas, en général, avec quelles briques, et sur quelles fondations, se fait cette construction.

Piaget et ses successeurs ont évidemment étudié et proposé quelques idées générales ou locales éclairant le déroulement de ce processus. Mais l'environnement de l'éducation change si vite, et l'histoire personnelle des apprenants est si mystérieuse, que toute planification de cette construction reste bien hasardeuse.

Pour illustrer cette non-règle, ma collègue Maryvonne Hallez m'a raconté une belle histoire de classe, à propos d'une situation qu'elle proposait à ses élèves :

« Voici un carré. Comment faire pour dessiner un carré dont la surface soit deux fois plus grande ? »

Comme dans toutes les salles de classe de mathématiques, il y avait des ciseaux sur la table et Jacques découpa le carré en deux le long de sa diagonale. « Madame, madame, s'écria-t-il, j'ai réussi, regardez ! »

Et il montrait son pitoyable demi-carré en forme d'équerre : « ça, c'est la moitié, le carré est bien deux fois plus grand. ». « Madame » n'était pas plus désespérée que d'habitude, Jacques n'étant jamais très intéressé et souvent plutôt dissipé. Elle répéta évidemment que ce qu'elle voulait, c'était un carré deux fois plus grand que le premier carré. Il prit ses deux demi-carrés en forme d'équerre et se mit à les manipuler et à les juxtaposer dans différentes positions. Lorsqu'il obtint une équerre deux fois plus grande que chacun des deux morceaux, il eut une espèce de rictus, s'excita subitement en cherchant son crayon puis dessina fébrilement deux grandes équerres accolées par l'hypoténuse. « Madame, madame, s'écria-t-il,… »

Un peu plus tard, lorsqu'il évoquait son bonheur passé avec « Madame », il prononça une phrase magnifique : « Quand j'ai accolé mes deux équerres le long de leur petit côté, j'ai vu que j'avais devant moi une grande équerre ; une équerre deux fois plus grande que chacune des petites. Mais alors, puisque la petite était la moitié du carré, c'est que la grande était aussi la moitié d'un carré,… un carré deux fois plus grand, donc ! Quand j'ai compris ça, dans ma tête, alors, madame, je me suis senti intelligent ».

Cette sensation, nous le savons bien, est particulièrement forte et impérieuse ; lorsqu'on l'a connue une fois, on ne rêve que de la renouveler ; comme dit le poète : « jamais de la vie on ne l'oubliera, la première flamme qu'on a vue dans sa tête ».

## Le prof

***Illusion 3* : Il faut découper les difficultés en petits pas !**

***Contre-pied :*** humm… Mais il ne faut pas forcément chercher à expliquer les choses pas à pas.

***Commentaire***

Il est vrai qu'il est parfois bien agréable d'apprendre un bout de mathématiques lorsque les enchaînements de lemmes, théorèmes et corollaires se déroulent comme les marches d'un escalier avec une rampe de chaque côté.

Mais « ce sont des mathématiques en pilules ! » disait Lebesgue.

Il arrive que nous acceptions, ou que nous réclamions même, une telle administration de connaissances (ça m'arrive assez souvent d'ailleurs). Mais quelle épreuve, quel ennui pour ceux qui n'auraient pas déjà le désir d'écouter et d'apprendre !

***Illusion 4 :*** **Il faut préparer son cours dans le plus petit détail !**
***Contre-pied :*** peut-être, mais n'arrivez surtout pas en classe en sachant tout ce que vous allez dire et faire devant vos élèves.
***Commentaire***
Car « *le seul enseignement que peut donner un professeur, c'est de penser devant ses élèves* » disait encore Lebesgue à ses élèves de l'Ecole Normale de Sèvres : « *préparez avec grand soin votre cours, mais surtout ne vous astreignez pas à suivre ce que vous avez préparé* », et Lucienne Felix rajoutait : « *faire un cours parfait répond aux besoins de l'érudition, mais non à ceux de la formation, lorsqu'il faut être prêt à tout et s'adapter à tout instant aux circonstances souvent inattendues* ».

## Les maths

***Illusion 5 :*** **On peut se passer de traductions concrètes des situations mathématiques !**
***Contre-pied :*** non, bien sûr, cette illusion-là est seulement celle de certains réformateurs du siècle dernier, tenants de la rigueur absolue et de la logique intraitable.
***Commentaire***
Mais, attention, comme on le développe plus loin, si l'on pouvait traduire toutes les mathématiques en situations concrètes, il n'y aurait pas de mathématiques.

***Illusion 6 :*** **Les mathématiques sont « vraies »** !
***Contre-pied :*** surtout pas, elles ne sont que cohérentes.
***Commentaire***
Trop souvent les gens croient (parfois même on leur fait croire) que les maths apportent la Vérité. Et on lie l'activité mathématique à la production d'un discours ou de résultats qui ne pourraient pas être FAUX. Rien n'est plus faux justement ! Car les mathématiques ne parlent pas de la vérité. Elles parlent de la cohérence, c'est-à-dire de la non-contradiction.
D'ailleurs, attention, la logique spontanée interprète souvent comme VRAI, un énoncé traduit par une situation concrète. Cette situation concrète semble « confirmer » la vérité de l'énoncé mathématique. « C'est vrai comme deux et deux font quatre », dit-on parfois. Non ! deux et deux ne « font » pas quatre. Et on peut exhiber des quantités de situations où deux et deux font autre chose que quatre (un peu plus ou un peu moins, ou…) ; et aussi des morceaux de mathématiques où $2 + 2$ font 1 (dans $\mathbb{Z}_3$) ou 0 (dans $\mathbb{Z}_4$) ou bien d'autres résultats exotiques.
Redisons le souvent : les mathématiques n'ont rien à voir avec le « vrai ».

## L'élève

***Illusion 7 :*** **L'élève ne doit pas faire d'erreur !**
***Contre-pied :*** c'est un objectif à long terme, mais, à court terme, il est plus utile de le laisser explorer lui-même quelques chemins.
***Commentaire***
Dans les situations de recherche, il est évidemment nécessaire de laisser ouvert le champ des possibilités et de faire, comme on dit, « des essais et des erreurs », de « l'heuristique » pour parler plus académiquement. C'est la condition de l'action efficace et l'élève ne doit pas être timide devant cette quête buissonnière d'expériences et de découvertes.

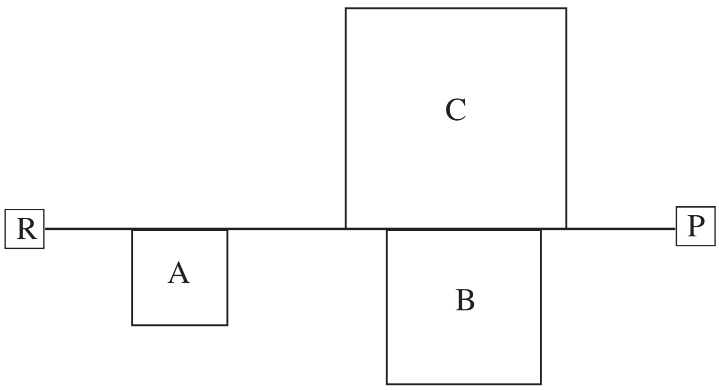
Dans des situations plus techniques, le but du professeur est, bien sûr, que l'élève sache faire sans erreur le calcul qu'on attend de lui. Mais pour atteindre ce but, on peut aussi (et on doit ?) dans un premier temps, laisser l'élève se tromper. Cela permet souvent de comprendre pourquoi il s'est trompé, ou bien de faire émerger ce qui bloque sa compréhension.

***Illusion 8 :*** **L'élève doit comprendre !**
***Contre-pied :*** bien sûr, mais qu'est-ce que « comprendre », c'est-à-dire « prendre avec soi » ? Et parfois, d'ailleurs, est-il utile de comprendre ?
***Commentaire***
Quand un élève dit « je ne comprends pas », il y a au moins deux possibilités.

* Dans un contexte plutôt technique, cela veut souvent dire : « je ne sais pas faire ce que vous attendez de moi ».
Prenons, par exemple, un élève qui doit développer $(x + 3)^2$ ; « Monsieur, prétend-il, je ne comprends pas » ; vous vous asseyez à ses côtés, vous lui montrez patiemment une technique infaillible : « je prépare trois places vides séparées par des signes +, là je mets le carré de $x$, là le carré de 3 et au milieu c'est un peu plus compliqué, je mets… etc. » ; le visage du gamin finit par s'illuminer, et le voilà prêt à vous en développer des centaines...
En un sens, il n'a rien compris ; mais il sait faire ; et « savoir faire » constitue le tout premier niveau de compréhension, la première spire de l'hélice qui se construit progressivement, avec d'autres, pendant toute notre vie intellectuelle.

* Dans un contexte plus explicatif, le blocage peut être plus profond et sérieux, et le conseil qu'il faut alors donner à l'enseignant est aussi important que paradoxal :
Si un élève « ne comprend pas », ne cherchez pas à connaître ce qu'il ne sait pas ! Cherchez plutôt ce qu'il sait et qui l'empêche de comprendre !
Car ce qu'il sait déjà ne cadre pas à ce que vous essayez de lui apprendre et fait donc « obstacle » à cette nouvelle connaissance. Dans ce travail de déblocage, il faut s'intéresser non pas aux connaissances qui lui manquent mais aux connaissances antérieures qui font obstacle (voir Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*).

L'exemple le plus caractéristique est celui de Stendhal, décrivant ses difficultés avec les nombres négatifs (dans *La vie de Henri Brulard*) :
« *Selon moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques… Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que moins par moins donne plus ? Mon grand problème était cette figure :*




*Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au dessus est positif comme est négatif ce qui est au dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté le carré C ?* »

**COMPRENDRE**

Nous pouvons maintenant préciser ce que c'est que « COMPRENDRE » :
Dans ce que l'on « sait », il y a deux sortes de connaissances :

**le savoir lui-même**
$7 \times 8 = 56$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
« Pythagore »,…

**les représentations du savoir**
le négatif est en dessous
l'orthogonalité,…

**Dans le savoir lui-même, *comprendre*, c'est souvent relier à du déjà connu** (par l'analogie ou la démonstration).

**Dans les représentations des mathématiques, *comprendre*, c'est disposer d'une situation concrète traduisant un énoncé mathématique.**

Ainsi « comprendre », c'est « ranger avec ce qui est déjà connu par soi » ou bien « associer à une expérience déjà connue de soi ».
Par exemple, pourquoi une hyperbole est-elle en général définie par 5 points ?
Parce que l'équation d'une hyperbole dépend de 6 paramètres a, b, c, d, e, f définis à un coefficient près (6 - 1 = 5) : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.
Dans l'exemple de la règle des signes, un habitué des mathématiques « comprend » que le problème se ramène à « -1 fois -1 font +1 », et c'est une propriété que l'on doit pouvoir démontrer dans tout anneau.
En effet, on démontre d'abord que $1 \times (-1)$ est l'opposé de 1 :
$[1 \times (-1)] + 1 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 1 \times [(-1) + 1] = 1 \times 0 = 0$.
On montre alors « de manière analogue » que $(-1) \times (-1)$ est l'opposé de $1 \times (-1)$ :
$[1 \times (-1)] + [(-1) \times (-1)] = (-1) \times [1 + (-1)] = (-1) \times 0 = 0$.
Ainsi, avec l'habitude, faire « comprendre », c'est finalement souvent « démontrer » ; et curieusement, on pourrait alors prétendre que personne ne « comprend » grand-chose en écrivant cette démonstration.

Mais ce n'est pas vraiment le sens où Stendhal pouvait vouloir « comprendre ». Lui aurait préféré sûrement qu'on lui présente une situation dans laquelle il pourrait interpréter à la fois le produit de deux nombres comme une aire de rectangle et le produit de deux symétries comme l'identité. Une telle situation, pas trop artificielle et suffisamment simple, n'existe pas (car on l'aurait déjà alors présentée dans les situations d'enseignement) … et ce n'est pas étonnant !
Il y a en effet un principe, une « illusion principale » (qu'on pourrait appeler « l'illusion de la caverne ») : l'illusion qu'il existerait des représentations des mathématiques quasi universelles et non contradictoires les unes les autres.
Or, si toutes les notions mathématiques pouvaient se représenter par des situations, disons concrètes bien qu'elles ne soient pas obligées de l'être, alors il n'y aurait pas de mathématiques ! Toute interprétation est donc vouée à devenir trompeuse ! Et lorsque des paradoxes semblent intervenir, c'est au niveau des représentations qu'ils se situent.
Prenons un exemple assez simple : soient deux véhicules supposés partir de Paris en ligne droite, circulant à la même vitesse et suivant deux routes faisant un angle de 60°. Les mathématiques sauraient-elles démontrer ceci : à tout moment la distance qui les sépare est égale à la distance

qu'ils ont parcourue ? Les mathématiques sauraient-elles dire où les deux véhicules vont se rencontrer ? (réponse possible lorsque les deux véhicules sont des avions : s'ils ont assez d'essence, ils se rencontreront alors aux antipodes de Paris).

On le voit, la compréhension est finalement un mécanisme compliqué, difficile à maîtriser pour un enseignant consciencieux. Cependant, il n'y a pas trop de souci à se faire, car il est en effet illusoire de penser qu'un bon prof peut et doit *tout* faire comprendre à ses élèves.

Mieux encore : parfois même, il n'y a rien à comprendre !

De sorte que l'on peut même donner un conseil pratique très efficace aux élèves : si vous ne comprenez pas, ne cherchez pas forcément à « comprendre » !

Je cite souvent comme exemple une anecdote qui fut, pour moi, l'une de mes premières leçons de didactique pratique et vécue…

Je tentais d'expliquer à des gens, qui n'avaient pas particulièrement de connaissances en mathématiques, l'intérêt de la traduction algébrique à travers le problème suivant :

*Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèse le bouchon ?*

J'avais écrit et résolu classiquement le système :

$B + x = 110$

$B = 100 + x$

d'où $100 + x + x = 110$

$100 + 2x = 110$

$2x = 10$

$x = 5$

L'incompréhension d'un de mes interlocuteurs était totale devant l'apparition de ce « $2x$ » pour une raison qui me fut ainsi énoncée : « Mais, je ne comprends pas, il n'y a pas *deux* bouchons… ».

Voilà bien des choses que l'on pourrait dire aux élèves pour les sécuriser lorsqu'ils ont la sensation de perdre pied … et pour leur donner dans les mathématiques la confiance que voulait leur faire Stendhal et qu'aucun de ses professeurs ne pouvait lui donner avant 1900.