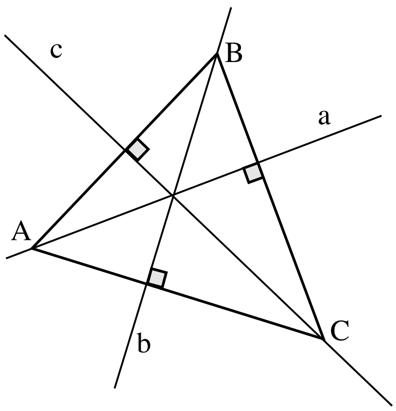
Triangles de hauteurs ou médianes ou médiatrices ou bissectrices données

Jean-François Kentzel

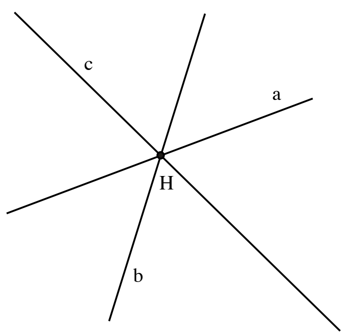
Je pratiquais les activités qui suivent en classe de seconde (on peut les faire aussi au collège) avant d'utiliser des logiciels mais ceux-ci les rendent plus rapides et plus plaisantes. Elles permettent une initiation aux commandes élémentaires de ces logiciels.

HAUTEURS

Tout le monde sait-il tracer les hauteurs a, b et c d'un triangle ABC donné ?
Acquiescement général.



Maintenant j'efface le triangle. Savez-vous « le » retrouver ?
Réponses peu assurées.



On va en fait trouver plusieurs triangles possibles.
Pour s'y retrouver, c'est en rouge que chaque élève trace trois droites a, b et c, concourantes en un point H pour avoir des chances d'obtenir un triangle.

Deux cas peuvent se présenter :
Le cas général : les droites b et c ne sont pas perpendiculaires.
On prend un point A, distinct de H, au hasard sur la droite a[1]. On suppose que le problème est résolu et on pense à la figure qu'on veut obtenir.
On finit par donner, en deux temps, la réponse pour certains élèves : tracer l'intersection de c avec la perpendiculaire à b passant par A (c'est « le » point C) puis l'intersection de b avec la perpendiculaire à c passant par A (c'est « le » point B). On trace alors le triangle ABC.
Les élèves doivent maintenant justifier que la droite a est perpendiculaire à (BC).

N'importe quel point A, autre que H, de la droite a permet d'obtenir un triangle ABC (qui est la seule solution correspondant à ce point A).

Le cas particulier : les droites b et c sont perpendiculaires.
La construction précédente est alors impossible et on ne peut obtenir aucun triangle solution de cette façon.

Jean-François Kentzel est professeur de mathématiques au lycée Pardailhan à Auch (32)

[1] Il est essentiel, pour ne pas avoir d'ennuis quand on va activer les traces, de CREER un point A sur a (et de ne pas prendre pour A un point qui a servi à définir a, car dans ce dernier cas, on ne peut plus faire varier A sur a sans modifier aussi a).

S'il y a une solution, le sommet A se trouve donc nécessairement confondu avec le point H.

On prend alors un autre point F sur la droite a et on trace la perpendiculaire à a passant par ce point F ; elle coupe la droite b (on obtient « le » point B) et la droite c (on obtient « le » point C).

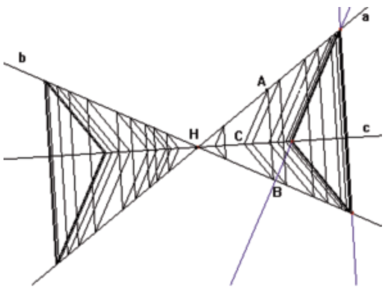
On trace alors le triangle ABC, qui est rectangle en A.

N'importe quel point F, autre que H, de la droite a permet d'obtenir un triangle ABC.

Dans la suite, on s'intéressera uniquement au cas général évoqué ci-dessus.

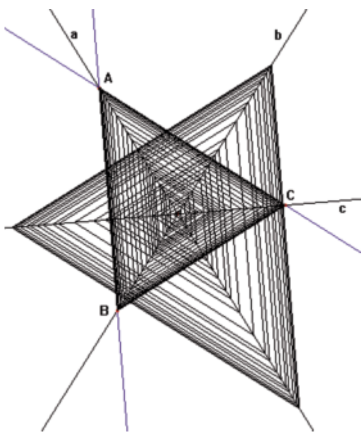
Pour les éventuels élèves[2] qui déclareraient que ce n'est pas formidable puisqu'on n'a probablement pas retrouvé le triangle de départ, on fait déplacer le point A sur a après avoir activé les traces[3] : le résultat n'est pas décevant.

On voit qu'il y a deux cas de figure assez différents :



H extérieur à ABC et ABC a un angle obtus.

Il existe un secteur angulaire droit contenant trois demi-droites (parmi a, b et c) d'origine H.



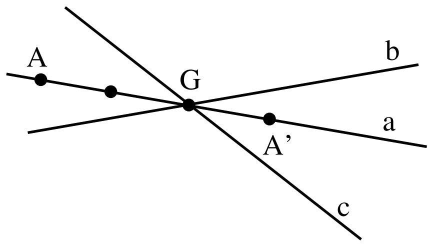
H intérieur à ABC et ABC n'a pas d' angle obtus.

Il n'existe pas de secteur angulaire droit contenant trois demi-droites (parmi a, b et c) d'origine H.

On voit que si on a conservé un des trois points A, B ou C, on retrouve nécessairement le bon triangle alors qu'on a « une chance sur deux » de le retrouver si on a conservé un point du triangle qui n'est pas un sommet.

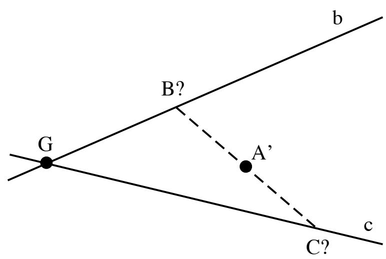
MÉDIANES

On part de trois droites a, b et c concourantes en un point G.



On prend un point A sur a. On trace le milieu de [AG] puis le symétrique de ce milieu par rapport à G. Le point obtenu est nécessairement A', le milieu de [BC] (ABC étant un éventuel triangle solution).

On doit alors répondre à la question (qu'il vaut mieux traiter avant d'aller en salle d'informatique) : b et c étant deux droites concourantes en G et A' étant un point extérieur à b et c, montrer qu'il existe un unique couple de points B et C vérifiant : B est sur b, C est sur c et A' est le milieu de [BC].



C'est « une histoire de parallélogramme » : on commence par tracer le symétrique de G par rapport à A', puis les parallèles à b et c passant par ce point.

2 Je n'ai jamais entendu cette réflexion car cette activité plaît aux élèves.

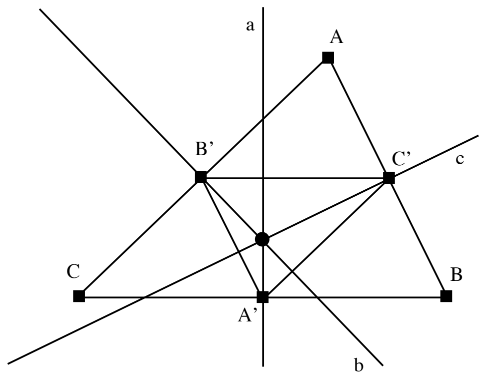
3 Avec Cabri, on peut activer directement la trace du triangle alors qu'avec Geogebra (début 2007), il faut activer la trace de chacun des trois segments (clic droit sur le segment).

On vérifie que ABC est un triangle solution, le seul admettant A pour sommet. Avec les traces, on obtient une figure du type de celle obtenue avec les hauteurs.

.

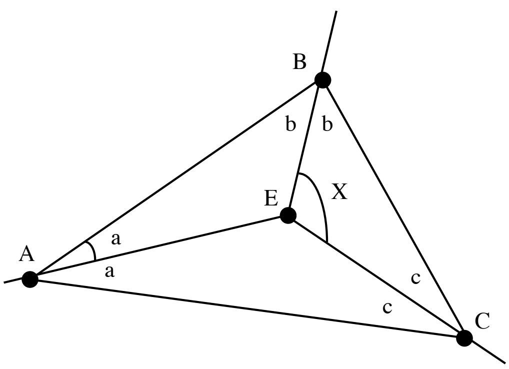
MÉDIATRICES

Ce problème semble *a priori* être le plus difficile des quatre car les points A, B et C ne sont pas sur les droites a, b et c : on ne sait pas « d'où partir ». Cependant, si trois droites concourantes a, b et c sont les médiatrices d'un triangle ABC, elles sont aussi les hauteurs du triangle A'B'C', où A', B' et C' sont les milieux des côtés de ABC. On sait déjà tracer A'B'C' et on pourrait facilement en déduire ABC.

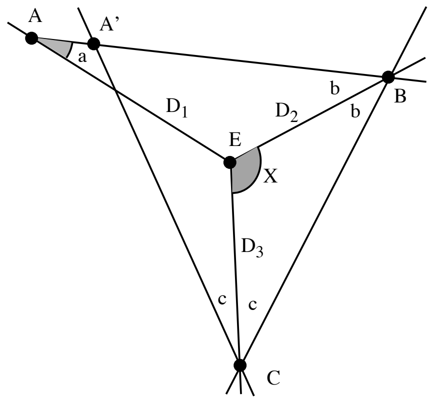


BISSECTRICES INTÉRIEURES

Résultat préliminaire : lorsqu'on trace les bissectrices intérieures d'un triangle avec



les notations d'angles ci-contre, on a nécessairement a = X - 90 (les angles étant mesurés en degrés). Il suffit en effet d'écrire les sommes des angles des triangles EBC et ABC : $\begin{cases} b+c = 180-\mathrm{X} \\ b+c = 90-a \end{cases}$



Cette propriété montre qu'on ne peut pas partir de trois droites quelconques D_1, D_2, D_3. Elle donne une idée pour tracer le triangle ABC dans le cas où les angles déterminés par D_1, D_2 et D_3 sont tous obtus. À partir de A sur D_1, on obtient facilement B, par exemple avec la commande angle de mesure donnée ou rotation dans Geogebra (où il ne faut pas oublier le symbole des degrés) puis, par symétrie S par rapport à (EB), le point C, intersection de D3 et de S((AB)) et, par symétrie S' par rapport à (EC) le point A', intersection de S'((BC)) et de (AB), voir la figure ci-dessus où les demi-droites données au départ sont notées D_1, D_2 et D_3. Il reste à prouver que A = A'.

Dans le triangle A'BC, (EB) et (EC) sont deux bissectrices donc (EA') est la troisième. D'après le préliminaire, l'angle EA'B vaut donc X-90 = a. (EA) et (EA') forment donc le même angle avec (AB) donc elles sont parallèles et ont un point commun : elles sont confondues ; A' est donc sur (AE) et sur (AB), c'est-à-dire que A' = A.

COMMENTAIRE

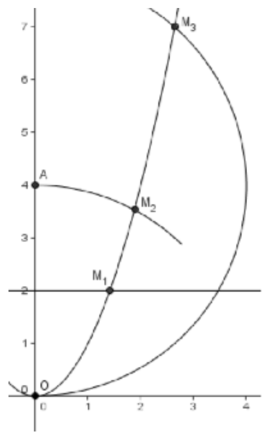
J'ai été poussé à proposer ce texte à la revue PLOT parce que m'est revenue en mémoire l'expression « perdre du temps à créer une figure pour voir trois droites concourir » (lue dans une intervention très opposée à l'usage des TICE, déposée le 7/12/07 sur le Forum libre[4] de l'APMEP). Dans cette activité, j'ai vu une élève, qui ira en première S, s'étonner du fait que certains triangles, obtenus lors de l'activité sur les hauteurs, avaient un orthocentre extérieur au triangle alors que pour d'autres, cet orthocentre est à l'intérieur. Nous avions pourtant assez longuement évoqué, avec des « figures-papier », ce fait quelques semaines plus tôt. Suite à cette question, chaque élève a pu alors à loisir, en manipulant les droites données au départ, obtenir plusieurs fois les deux cas de figure. En restera-t-il plus de traces ? Je ne l'affirme pas. Les TICE sont des outils parmi d'autres. Aucun outil n'est à négliger mais aucun ne détient à lui seul la clé de la réussite pour tous les élèves.

Voici, pour terminer, une anecdote montrant que l'utilisation des TICE n'est pas systématiquement pertinente.

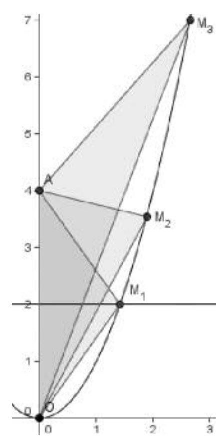
La question posée : le plan étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par C la parabole représentant la fonction carré et par A le point de coordonnées A (0 ; 4). On cherche les points M de C d'abscisse x positive (on s'en contente pour des raisons de symétrie) rendant isocèle le triangle OAM. L'objectif essentiel de cette activité est d'insister sur la notion de représentation graphique d'une fonction en faisant écrire $y_M = x^2$ aux élèves.

Il faut noter qu'une des solutions ne peut être obtenue sans aide en seconde (x est solution d'une équation bicarrée ; du coup, cette question peut être posée en début de classe de première).

On se demande d'abord combien il y a de solutions.



En tapant et validant x^2 dans la zone de saisie de Geogebra, on obtient directement C. J'espérais que les élèves traceraient une médiatrice et des arcs de cercle comme ci-dessus (ce qu'ils auraient fini par faire en l'absence de logiciel) mais j'ai eu le tort de dire à certains élèves de placer un point M sur C et de le déplacer pour faire varier le triangle OAM. Geogebra affiche en effet automatiquement les longueurs des segments dans la zone de calcul. Tous les élèves se sont alors lancés dans une recherche assez erratique et longue des trois points qui conviennent…



[4] Je lis avec intérêt ce qui se dit sur le sujet car je suis favorable à l'usage des TICE en classe ; cependant que je constate quotidiennement avec stupeur les ravages du « tout-informatique » ; par exemple dans le domaine du calcul, le « réflexe calculatrice » pour calculer 3 + 1/2.