Question(s) et Réponse(s)

André Revuz

André Revuz a passé sa vie au service des mathématiques et de leur enseignement. Il a su, à toutes les étapes de sa carrière, défendre ses convictions, combattre le dogmatisme et les idées reçues. Il a milité pour que les mathématiques soient mieux enseignées, en faisant confiance à l'intelligence de ceux qui apprennent.
A l'heure où nous lui donnions, avec beaucoup de joie, la parole dans ce numéro de PLOT, nous avons appris son décès.
L'équipe PLOT a conscience de perdre avec lui un ami et un soutien de la première heure. Nous sommes extrêmement tristes. Nous sommes aussi très émus de penser que les dernières lignes qu'il a écrites, cet été, étaient destinées aux lecteurs de PLOT. Il nous offre ce témoignage d'une pensée qui aura été jusqu'au bout précise, énergique et claire. Nous le recevons avec reconnaissance et émotion.

À la fin d'un très intéressant article paru dans le Bulletin de l'APMEP de janvier-février 2008 et intitulé *Quelques interrogations à propos du « tableau de signes »*, Dominique Gaud conclut par cette remarque : « *Bachelard dit que toute connaissance est réponse à une question. Notre enseignement n'a-t-il pas tendance à donner aux élèves des réponses avant qu'ils ne se posent de questions ?* »
On ne peut qu'être d'accord. Mais cela pose immédiatement deux questions :

a) Pourquoi l'enseignement a-t-il cette attitude ?

b) Quelles sont ces questions dont les connaissances sont les réponses ?

Ces questions en éveillent une foule d'autres, et en particulier celle de l'attitude des humains à l'égard de toute question. Il me semble que leur instinct les pousse à les redouter. Si la question a une réponse immédiate, et cela arrive tous les jours dans la vie courante, il n'y a pas de problème. Mais s'il n'y a pas de réponse évidente, cela peut tourner à la panique. Pensez aux questions du type : « Que suis-je ? », « Que sommes-nous ? », « Où allons-nous ? ». Elles peuvent être terriblement angoissantes, grâce à quoi une réponse « définitive », si peu justifiée soit-elle, est acceptée avec soulagement par la plupart. Il me semble qu'il y a au fond de l'âme humaine un certain nombre de peurs difficilement surmontables et en premier lieu la peur de l'inconnu. L'être humain panique quand il est contraint d'avouer : « Je ne sais pas ! » et il est prêt à se rassurer en disant : « Je sais ! », alors qu'il ne sait rien du tout. Le nouveau lui fait également peur. Ce n'est plus un inconnu total, mais il l'est assez pour inquiéter et ce, d'autant plus qu'il peut entrer en action de manière immédiate. Le résultat est que la quasi totalité de l'humanité évite de se poser des questions, et que d'autres renforcent cette attitude par la persuasion ou la contrainte, en donnant des réponses « définitives » aux questions qui font peur. Et c'est ainsi que l'attitude générale de l'enseignement est l'héritière d'une tradition multimillénaire qui est encore présente, même dans les sociétés les plus « évoluées » et qui veut que celui qui enseigne (le prophète, le prêtre, le maître…) présente la « vérité » que l'élève doit accepter sans discuter. Se poser sans panique des questions dont on ne possède pas de réponse immédiate est en revanche la première démarche qui peut conduire à la science, mais elle est aussi avant tout celle de l'homme qui assume sa liberté et ne transige pas sur la qualité de la réponse.

Toutes les questions mènent-elles à une connaissance scientifique ?

Evidemment non ! L'essentiel et le difficile est de trouver les « bonnes » questions. À quoi les reconnaît-on ? À la qualité de la réponse ! Si celle-ci apporte une connaissance parfaitement vérifiable et éclairante, la question était bonne. Mais si l'on ne sait pas répondre, faut-il en conclure que la question n'était pas bonne ? Pas forcément, mais il faudra approfondir l'étude du sujet « en question » ! Il peut aussi arriver que la réponse à la question soit une critique de la question et en quelque sorte une question sur la question. Il ne faut pas opposer dans deux statuts totalement étrangers les questions et les réponses, mais considérer dans un rapport dialectique les couples question(s)-réponse(s). La réponse pouvant être une incitation à poser autrement la question ou à poser une autre question*.

Après des tâtonnements qui peuvent être très longs et des modifications qui peuvent être progressives ou, au contraire, brutales, on peut arriver à une « bonne question ». Hadamard disait : « *les idées naturelles sont celles qui viennent en dernier* ». Naturelles ne voulant pas dire spontanées, mais adaptées au problème abordé. Un adage veut que tout problème bien posé soit à moitié résolu et dans la pratique, il n'est pas rare que la bonne réponse suive assez vite l'énoncé de la bonne question.

Cependant, la bonne question que nous venons d'évoquer est la bonne question pour le chercheur ; l'est-elle aussi pour l'enseignement ? Rien n'est moins sûr ! Elle risque d'être trop technique pour être présentée d'emblée et, se focalisant sur l'essentiel du problème, de ne pas mettre en lumière les aspects latéraux qui peuvent être indispensables pour bien comprendre de quoi il s'agit. Il me semble difficile de donner une règle générale pour poser « la bonne question » de l'enseignement et je pense qu'il faut plutôt songer à une adaptation particulière à chaque cas et ne pas oublier que, souvent, il faudra faire intervenir, plus qu'une question unique, une problématique, c'est-à-dire une famille complète de questions et de réponses. Il ne faut, d'autre part, pas se dissimuler qu'il peut y avoir un aspect artificiel à poser des questions dont la réponse est connue depuis longtemps… mais pas par les élèves. Les questions doivent les amener à découvrir ce qui est nouveau pour eux, c'est-à-dire à redécouvrir aux yeux de ceux qui savent, et s'approprier personnellement leurs nouvelles connaissances.

Je voudrais maintenant donner deux exemples où l'enseignement a été pris en flagrant délit de ne pas poser de questions. Mais je serais heureux que d'autres prennent le relais et traitent d'autres exemples.

* Il peut être amusant de citer ici la préface de la seconde édition de "La Critique de la Raison Pure", où Kant commence par répondre aux critiques faites à ses thèses, mais ce faisant, il pense à d'autres critiques possibles pour les réfuter immédiatement et il amorce une cascade de critiques-réfutations analogues aux cascades questions-réponses de la recherche scientifique. Les voies de la vérité se ressemblent !

Il y a une cinquantaine d'années, j'avais accepté de faire passer l'oral du concours des ENSI. Je trouvais rapidement la tâche très difficile, car les candidats savaient utiliser sans les dominer un certain nombre de techniques, mais la bande de connaissances dans laquelle on pouvait espérer les départager était extrêmement étroite : au-dessous, ils savaient tous faire ; au-dessus, personne ne savait faire. J'avais un peu l'impression d'avoir affaire à des robots programmés à l'identique et, sans doute pour me défouler, j'ai dit à un certain nombre d'entre eux, en fin d'interrogation : « L'interrogation est terminée, votre note est fixée, mais je voudrais en dehors du concours vous poser une question : pourquoi vous a-t-on enseigné les séries ? ». Je ne fus bien sûr pas surpris de ne recueillir comme réponse qu'une moue dubitative, et chez certains, avec un sourire : « Parce que c'était au programme ! ». Mais personne ne sut me dire à quoi cela pouvait servir. Un bel exemple, donc, où l'enseignement avait donné des réponses sans avoir posé la moindre question. Mais, au fait, qu'aurait pu être la… ou les questions ? Pour en formuler, il faut revenir sur l'histoire des mathématiques et ne pas les enseigner comme si c'était des vérités intemporelles connues de tous les temps et, en l'espèce, je pense qu'il faut remonter aux pythagoriciens qui avaient hardiment proclamé cinq siècles avant J.C. : « *Tout est nombre !* ». Mais pour eux, les nombres étaient ce que nous appelons les rationnels positifs, et comme ils travaillaient consciencieusement l'arithmétique, ils firent cette découverte effroyable : « *Il n'y a pas de nombre dont le carré soit 2* ». Que faire alors de la diagonale du carré de côté 1 ? Ce fut une véritable catastrophe. Les nombres avaient trahi : on les abandonna. Euclide, qui vint après eux, manipule des segments de droite, des aires, mais pas directement des nombres. On pourra dire que l'aire du carré construit sur la diagonale du carré de côté 1 est le double de l'aire de ce carré, mais on ne parlera pas de ce monstre que serait un nombre ayant 2 pour carré. Eudoxe*, l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, introduisit des considérations qui préfiguraient les coupures de Dedekind, mais qui ne les étaient pas vraiment.

Où était la différence ?

Dans le domaine des rationnels, on peut donner des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ mais il y en a une infinité. Et c'était là le problème. Pour les Grecs, l'infini signifiait le non-fini ou, comme ont dit certains, l'infini potentiel, mais ils refusaient l'infini actuel, c'est-à-dire, en l'espèce, considérer comme un tout l'ensemble des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, ce que fit Dedekind, 25 siècles plus tard, avec les deux ensembles constituant une coupure. L'« infini actuel » leur apparaissait comme un monstre, et c'en est un, et les mathématiques ont fait avec Newton et Leibniz une avancée considérable en commençant à domestiquer ce monstre. Mais ce qui persiste à nous échapper, et ce qui effrayait les Grecs, c'est la possibilité de se le représenter. Prenons, en effet, le plus simple de tous les ensembles infinis : l'ensemble **N** des entiers naturels. Nous savons le manipuler, grâce en particulier au principe de récurrence, mais pouvons-nous nous le représenter ? Avec combien d'entiers sommes-nous familiers ? Le plus grand nombre figurant dans la langue latine était Mille. Million date de la fin du 13ème siècle (Marco Polo), et Milliard date sans doute de moins de deux siècles. Actuellement, le milliard de milliards permet de dénombrer les galaxies et les synapses du cerveau humain et nous

* Eudoxe de Cnide vécut autour de - 380. D'aucuns disent que ce sont ses travaux qui ont donné le jour au 5ème livre d'Euclide.

sommes prêts à dire qu'il s'agit de « grands nombres », mais en réalité dans **N** ils sont tout petits. Si vous ne craignez pas le vertige, imaginez que l'on trace un segment partant de la Terre et aboutissant dans une des plus lointaines galaxies et que l'on ait écrit sur ce segment un 9 tous les microns. Cela fait un nombre colossal, insaisissable et pourtant, dans **N**, il est tout petit : élevez-le, par exemple à sa propre puissance et il paraîtra minuscule. Il y avait donc une conversion à faire : concevoir des règles permettant d'utiliser l'infini sans essayer de se le représenter. Ce fut le mérite de Newton et de Leibniz, et qu'il ait fallu ces deux géants pour le faire confirme bien que ce n'était pas facile. Grâce à eux, toutes les « limites » qui seraient inaccessibles par des démarches finies ont droit de cité. Et des limites, ils en ont inventé de deux sortes :

a) les sommes de séries, comme limites des sommes S_n des n premiers termes lorsque « n tend vers l'infini ». Ils y ont peut-être été aidés par la sympathique série géométrique dont on peut calculer facilement les sommes S_n et trouver évidente leur limite. Les séries qu'ils ont étudiées en étaient d'ailleurs des cousines germaines.

b) les dérivées, c'est-à-dire les fluxions de Newton et les différentielles de Leibniz. Il s'agissait là d'une tentative encore plus hardie permettant de caractériser par un nombre le comportement « local » d'une fonction. En franchissant ce pas, ils ont fondé l'analyse moderne. Mais il restait un énorme travail à faire. Grâce aux séries, on pouvait faire des calculs sur « tous les nombres » ! Après avoir été expulsés de la géométrie par Euclide, puis réintroduits par Descartes, ils devenaient complètement utilisables. Mais qu'étaient-ils ? Il faudra attendre encore deux siècles pour que Dedekind réponde d'une manière définitive à la question. Quant à la notion de dérivée, elle paraissait si peu claire à Lagrange qu'il a voulu la contourner. Et Cauchy a mis les choses au point, un siècle et demi après Newton.

Alors, si je parle de séries à des élèves, de quelles questions puis-je les présenter comme une réponse ? Le sujet est complexe et il me semble qu'il faudrait procéder progressivement. Dès le début d'un cours sur les séries, en tout cas, j'indiquerais la date de leur introduction, je citerais Newton et Leibniz, et, en particulier, dès que possible, la formule

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

donnée par Leibniz, qui pour la première fois sans doute donne une valeur explicite de π. En donnant la définition de la notion de limite, j'insisterais sur la présence incontournable de l'infini, sur la nouveauté cruciale que cela a constitué et le formidable bond en avant que cela a permis. Mais je parlerais sans doute aussi des pythagoriciens dont je dois avouer que l'aventure me fascine !

Passons à une autre situation.

Il y a quelques années, on m'a demandé si je pouvais aider en mathématiques une jeune fille de mon village qui entrait en terminale. Bien qu'un retraité ait moins de loisirs qu'on ne le croit, j'ai accepté. Lors de la première séance, je lui ai demandé s'il y avait une question dont elle aimerait que l'on discute. La réponse jaillit immédiatement : *« Oh, oui ! Il y a les dérivées. Je sais calculer toutes les dérivées, mais je n'ai pas bien compris ce qu'est une dérivée »*. Cette réponse spontanée et ingénue n'est-elle pas une condamnation sans appel d'un type d'enseignement encore trop répandu : on enseigne des techniques, mais on passe rapidement sur les idées fondamentales que les techniques doivent mettre en œuvre.

Voici, dans ses grandes lignes, ce que je lui ai répondu.

Si vous prenez des fonctions du type $f(x) = ax$ ou $f(x) = ax+b$, quelle est la signification du coefficient a ? Il indique comment réagit la fonction à un accroissement de la variable et peut être raisonnablement qualifié de taux d'accroissement. Mais y a-t-il quelque chose d'analogue pour les autres fonctions dont le graphe n'est pas une droite ? On peut considérer $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qui est le taux d'accroissement de la fonction linéaire interpolant la fonction f sur l'intervalle fermé d'extrémités x et $x+h$ lorsque h est non nul. Ce n'est pas sans intérêt, mais ne rend pas compte fidèlement de ce qui se passe pour f entre x et $x + h$.

Une idée : diminuer $|h|$. Si l'on prend des fonctions simples, on constate que la portion de graphe entre x et $x + h$ est de moins en moins mal représentée par le segment qui en joint les deux extrémités, mais si l'on fait $h = 0$, il n'y a plus de segment et plus d'interpolation.

On arrive là au cœur de la question. Considérons des fonctions très simples, par exemple les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$, on a :

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x+h \quad \text{et}$$

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2+3hx+h^2$$

Si $|h|$ est « petit », on est proche de $2x$ dans un cas et de $3x^2$ dans l'autre.

Le vocabulaire utilisé ici joue un rôle crucial dans la représentation que l'on pourrait se faire de la notion de limite. Dans le langage courant, on aurait tendance à dire que, si $|h|$ diminue, alors on se rapproche de $2x$ dans le premier cas et de $3x^2$ dans l'autre. Ces expressions peuvent fâcheusement induire un aspect « dynamique » et/ou « monotone » fallacieux. J'ai insisté sur le fait que, dans les membres de droite, on peut prendre $h = 0$ alors qu'on ne le peut pas dans les membres de gauche, mais que les membres de droite sont aussi proches que l'on veut de $2x$ et de $3x^2$ respectivement, à condition de prendre $|h|$ suffisamment petit.

On arrive alors à dégager la définition générale bien connue de la limite de lorsque $|h|$ tend vers 0 : si, en prenant $|h|$ suffisamment petit, on peut rendre $f(x+h)$ aussi proche que l'on veut d'un nombre l, on dit que la fonction f est dérivable en x de dérivée l. On dit aussi que l est la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque $|h|$ tend vers 0.

Je lui donnai tout de suite l'exemple d'une fonction non dérivable, avec un graphe ayant une infinité de dents de scie entre les droites $y = x$ et $y = -x$.

Puis je lui fis remarquer que la dérivée pourrait s'appeler très raisonnablement coefficient local d'accroissement.

Je définis bien sûr aussi la tangente et citai les différents noms que peut prendre une dérivée suivant la nature des grandeurs dont les mesures entrent en jeu : intensité, densité linéaire, vitesse… Lorsque je prononçai le mot « vitesse », mon élève s'exclama :

« *Ah ! vitesse ! On m'en a parlé en physique.*

- Bien, et vous a-t-on dit que c'était une dérivée ?

- Non !

- Et le professeur de mathématiques vous a-t-il dit que, parmi les dérivées, il y avait les vitesses ?

- Non ! »

Admirable liaison entre les enseignements scientifiques !

Ainsi, en une petite heure, j'avais rassuré mon élève et dissipé ses inquiétudes, tout en étant loin d'être sûr que l'exposé que j'avais fait ait été le meilleur possible, exposé qui devrait de toute manière être complété par un retour approfondi sur la notion de limite.

CONCLUSION

provisoire, comme toute conclusion…

Ne serait-il pas sain que l'enseignement de toute théorie mathématique réponde aux trois questions exprimées familièrement sous la forme :

1. D'où ça sort ?
2. Comment ça marche ?
3. À quoi ça sert ?

L'enseignement répond traditionnellement plus ou moins bien à la deuxième question, mais est en général muet sur les deux autres qui d'ailleurs ne sont pas indépendantes. Sans entrer dans les détails de leur histoire, il me semble fondamental que tous les élèves en connaissent les grandes lignes. Il me paraît également important de ne pas oublier qu'à l'origine, toute mathématique a été une mathématique appliquée : dénombrer des collections, mesurer des longueurs, des aires, des volumes…, puis exprimer des lois physiques (Galilée !).

Mais assez vite, on s'est intéressé aux mathématiques en elles-mêmes, elles sont devenues « pures » et leur beauté pourrait être pour certains la raison fondamentale de leur étude, mais il se révéla qu'à leur tour des mathématiques pures pouvaient être riches d'applications non prévues à l'origine. Les exemples ne manquent pas. Un des plus impressionnants, à mes yeux, est l'utilisation des espaces de Riemann pour les théories de la relativité.

L'enseignement manque fondamentalement à sa tâche en omettant la première et la troisième questions énoncées ci-dessus, c'est-à-dire en omettant de poser les questions dont, selon Bachelard, les théories scientifiques sont la réponse.

Mais que l'on ne s'y trompe pas ! Il s'agit, en général, non pas d'une question isolée, mais d'une problématique, c'est-à-dire d'un foisonnement de questions. Mais le progrès obtenu en posant explicitement ces questions peut et doit être conforté par un questionnement au cours de l'étude intrinsèque des théories, comme l'ont si bien montré Liouba Leroux et Thomas Lecorre dans le remarquable article *« Le débat scientifique en classe »* publié dans le numéro 19 de la revue PLOT, avec le sous-titre éloquent : « *Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématiques ? »*.

Finalement, la formule-clé, qu'il s'agisse de la qualité de l'enseignement ou de la santé des sociétés n'est-elle pas le couple indissociable

« LIBERTÉ-RESPONSABILITÉ » ?