

Les spirolatères

Une méthode originale pour convaincre les élèves de l'utilité des démonstrations

Avec un titre pareil, pas étonnant que l'atelier animé aux journées de Besançon par Pierre-Alain Müller ait eu du succès... Parmi les présents, deux membres de l'équipe PLOT ! Pierre-Alain Müller fait partie d'un groupe de travail IREM, groupe dont la spécificité réside dans la volonté d'intégrer, d'articuler les situations de recherche à la pratique quotidienne de la classe, de les mettre au service de l'apprentissage des contenus mathématiques. L'intégralité de leurs travaux est téléchargeable sur : www3.ac-nancy-metz.fr/pasi/IMG/545557Colleges2006.pdf. Vous trouverez, détaillée, l'intégralité de l'expérience « spirolatère » mais aussi d'autres points du programme de 4^{ème} (quadrilatères, droites des milieux, Varignon) et des activités à mener en 6^{ème} et 5^{ème}... 88 pages d'une très grande richesse.

L'origine de la recherche

Les programmes de mathématiques, à tous les niveaux d'enseignement, recommandent la pratique d'activités de recherche, de situations permettant à l'élève de découvrir l'aspect « science expérimentale » des mathématiques. Cependant les enseignants de mathématiques proposent peu d'activités de ce type, ou les relèguent dans un statut périphérique, exceptionnel, éloigné du « vrai » cours de mathématiques. Cette défiance des professeurs vis-à-vis de ces activités peut s'expliquer par divers facteurs : crainte de perdre du temps, peur de ne pas savoir les mener, déficit de répertoire...

La pratique des activités de recherche vise d'une part à donner aux élèves l'habitude et le goût de chercher et d'autre part à donner du sens aux notions du programme.

Le choix de la quatrième

Nous avons choisi la classe de quatrième comme terrain d'expérimentation privilégié car beaucoup d'élèves éprouvent de grandes difficultés à ce niveau. La notion de démonstration s'installe et les élèves sont déroutés par les changements d'exigences des professeurs.

Notre pari réside dans le fait de croire que les élèves comprendront mieux l'intérêt de démontrer si on les fait passer par la pratique d'activités qui nécessitent de convaincre et de prouver.

Il semble, d'autre part, que de nombreux élèves ne parviennent pas à comprendre ce qu'est une propriété mathématique. Nous avons choisi de mettre les élèves en situation de producteurs de propriétés afin de leur faire prendre conscience des critères qui font qu'un énoncé est une propriété mathématique.

L'épineuse question du coût horaire

L'horaire de mathématiques est étrié au regard des programmes à traiter. Le détour par un chapitre supplémentaire ne se justifie que s'il permet de gagner du temps ensuite. Notre regard sur trois années d'expérimentation nous permet de dire que cela a souvent été le cas. Il a été moins indispensable de revenir sur la nécessité de démontrer par la suite dans l'année. La référence aux propriétés produites lors de l'activité des spirolatères a souvent permis de redonner du sens aux propriétés découvertes dans le cadre du programme.

Ajoutons que la gestion du capital horaire est une affaire de choix : le nôtre consiste à consacrer du temps, deux ou trois fois par an pendant la scolarité au collège, à mettre les élèves en situation de chercheurs, quitte à adopter à d'autres moments une attitude plus transmissive, moins dévoreuse de temps. Il ne nous paraît pas incongru de consacrer une ou deux heures à faire découvrir les propriétés liées à la configuration de la droite des milieux mais de présenter dans la même classe le théorème de Pythagore d'une manière plus traditionnelle.

Le choix des spirolatères

Afin que les élèves produisent des propriétés, nous leur avons proposé une situation délibérément hors programme : les spirolatères, objets mathématiques marginaux qui datent de la préhistoire de l'informatique pédagogique, à l'époque du langage LOGO.

Ce travail sur un contenu extérieur au programme aura pour objectifs :

- d'élucider la notion de propriété mathématique,
- de donner du sens à la nécessité de démontrer, au sens de « convaincre ».

L'activité sur les spirolatères prend donc place en début d'année, avant tout autre travail de démonstration.

Qu'est-ce qu'un spirolatère ?

Les spirolatères ont été inventés par le biochimiste Frank Olds au début des années 70. Le spirolatère d'ordre n est construit en dessinant une suite de seg-

ments ; le premier mesure une unité de longueur, puis chaque nouveau segment est obtenu en augmentant la longueur d'une unité et en tournant d'un angle constant. La figure 1 montre la construction d'un spirolatère d'ordre 3 (défini par la suite de nombres 1, 2, 3 répétée quatre fois) avec un angle de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Nous avons légèrement modifié l'objet en considérant que les longueurs des différents segments ne sont pas forcément des entiers consécutifs et nous avons choisi de tourner toujours de 90° dans le sens direct.

Pour tracer le spirolatère 1-3-2-5-2 : on choisit un point sur une feuille quadrillée puis on trace des segments :

- De 1 carreau vers la droite
- De 3 carreaux vers le haut
- De 2 carreaux vers la gauche
- De 5 carreaux vers le bas
- De 2 carreaux vers la droite
- De 1 carreaux vers le haut
- De 3 carreaux vers la gauche

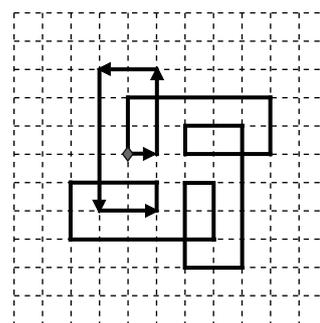
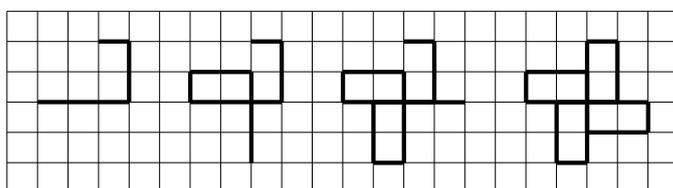


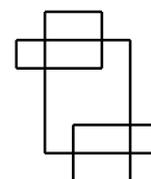
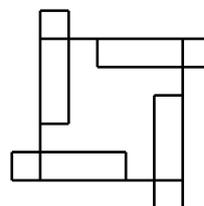
Figure 1



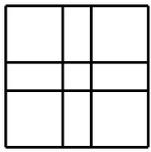
Exemples

3-1-4-1-6

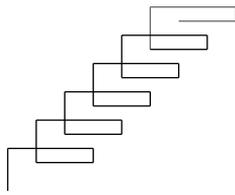
4-1-3-2-2-5



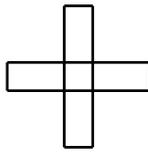
5-3-3



4-1-6-3



1-3-3



Nous appelons « longueur » du spiro-latère le nombre de termes de la suite le définissant.

Nous décidons de choisir ces termes parmi les entiers dans l'intervalle [1 ; 9].

A vos crayons !

Vous pouvez, avant de poursuivre la lecture de ce compte rendu, vous mettre à tracer des tas de spiro-latères comme cela a été demandé aux participants lors de l'atelier puis émettre des conjectures les concernant.

Quelques questions ou résultats que vous risquez de rencontrer, comme les élèves :

- *cela se referme-t-il ?* La réponse est « toujours » si la longueur du spiro-latère n'est pas un multiple de 4, « exceptionnellement » dans le cas contraire.
- *la figure a-t-elle toujours un centre de symétrie, est-elle toujours stable par rotation d'un quart de tour ?*
- *chaque spiro-latère est-il défini par une suite unique ?* Cela peut conduire à définir une notion de « suite minimale » ou de « spiro-latère irréductible ». Il est flagrant, en effet, que la répétition de la suite génère la même figure : 1-2 et 1-2-1-2 produisent le même rectangle.
- Les élèves peuvent s'intéresser aux spiro-latères de longueur 1, de longueur 2.
- Ils peuvent chercher l'incidence de transformations sur les nombres : que

se passe-t-il si on les permute ? si on les multiplie par 2 ?...

Avec les élèves, le protocole se déroule suivant trois phases :

- Phase 1 : découverte des spiro-latères et production de propriétés.
- Phase 2 : choix de propriétés à communiquer à une autre classe.
- Phase 3 : étude des propriétés reçues de l'autre classe.

L'intérêt particulier de l'expérience est l'échange mené avec d'autres classes du département. Ainsi, les propriétés dégagées auront été étudiées collectivement en classe, un vrai débat ayant lieu pour les valider/infirmier.

Les compétences visées

Les compétences que nous espérons développer chez les élèves sont de plusieurs natures :

Les compétences relatives au raisonnement

La nécessité de démontrer

L'objectif principal visé est donc que les élèves comprennent que la vérité d'une assertion mathématique n'est pas une question d'opinion. Nous pouvons détailler cet objectif en plusieurs composantes :

- Les élèves comprennent le principe du tiers exclu : une propriété est juste ou elle est fausse.
- Les élèves comprennent qu'il suffit d'un contre-exemple pour invalider une assertion.
- Les élèves comprennent qu'une multitude d'exemples favorables ne suffit pas, en soi, à établir la vérité d'une assertion.

En ce qui concerne ce dernier objectif, il convient toutefois de nuancer. Nous considérerons que l'élève qui repère un invariant dans une série (éventuellement très limitée) d'exemples et qui découvre que cet invariant est décisif pour l'explication de la propriété qu'il a conjecturée fait acte de démonstration.

Nous pouvons prendre l'exemple de l'assertion « les spirolatères de longueur 2 sont des rectangles ». On peut supposer que les élèves n'auront pas besoin de multiplier les expériences pour se convaincre que le phénomène qui se produit – à savoir que les déplacements vers la gauche et la droite, ainsi que les déplacements verticaux, sont de même longueur – se reproduira/répètera quels que soient les nombres choisis.

L'élève se situera ainsi au niveau de preuve que Nicolas Balachev qualifie de « l'exemple générique » : l'élève établit le résultat avec deux valeurs quelconque, en étant conscient qu'avec d'autres valeurs « cela serait pareil ».

Qu'est-ce qu'une bonne propriété ?

Quand ils devront choisir les propriétés à conserver, les élèves devront se construire et utiliser des critères de choix.

On peut supposer qu'ils privilégieront le critère d'exactitude : la propriété n'est pas prise en défaut.

On peut s'attendre à qu'ils découvrent d'autres critères :

- Critère d'utilité et d'économie : la propriété permettra d'économiser d'autres recherches, de se prononcer sur la vérité d'autres propriétés.
- Critère de généralité, de portée : la propriété concerne suffisamment de cas pour être utile.
- Critère de « non-évidence » : la propriété n'est pas triviale.

- Critère de précision : la propriété est rédigée en termes suffisamment précis pour ne pas être un « fourre-tout ».

- Critère de non-redondance : il n'y a pas de redites entre les différentes propriétés choisies.

- Critère de force : une propriété qui en englobe une autre est plus intéressante que cette dernière.

Les compétences relatives à la communication

Habituellement, la communication d'un résultat de mathématiques est, pour l'élève, un exercice paradoxal : il lui faut écrire ou dire quelque chose à un interlocuteur qui sait mieux que lui ce que l'élève est censé lui apprendre. Le critère de réussite de l'exercice n'est pas la pertinence, le volume, l'originalité du message, mais sa conformité à l'attente de l'enseignant. Cette conformité concerne le contenu mais aussi la forme.

La situation est d'autant plus compliquée pour l'élève que, là encore, les règles ont pu changer : le professeur n'a plus les mêmes exigences que l'année précédente.

Les choix d'organisation de l'activité sur les spirolatères prennent en compte cette difficulté en proposant plusieurs situations de communication échappant à ce paradoxe :

- À l'issue de la deuxième séance, les élèves donnent une liste de propriétés au professeur.

° Celui-ci ne les connaît pas auparavant.

° Ces propriétés ne sont pas pour l'instant affectées d'une valeur de vérité, ni d'une exigence de vérité. Les élèves ont parfaitement le droit de leur laisser un statut d'hypothèse.

- La consigne est suffisamment floue pour n'induire aucune recherche de conformité à un modèle supposément attendu par le professeur.
 - Aucune évaluation de quelque nature que ce soit n'est annoncée par le professeur. Il demande simplement à être informé des remarques formulées par les élèves.
 - Les propriétés recueillies sont communiquées à l'ensemble de la classe lors de la troisième séance.
 - Le destinataire n'est plus le professeur.
 - Les auteurs sont connus. Des enjeux personnels, dépassant le cadre du message transmis, peuvent intervenir : un élève peut souhaiter contredire l'un de ses camarades ou, à l'inverse, il peut être tenté de le croire aveuglément...
 - Les codes de langage des auteurs sont partagés par les récepteurs. Une part d'implicite est possible à l'intérieur de la classe car celle-ci a un vécu commun (en général, et en ce qui concerne les spirolatères). Cette part d'implicite tolérable contribue à la définition de l'identité de la classe.
 - Dans cette même séance et dans la suivante, les groupes, puis la classe, produisent un texte destiné à une autre classe.
 - Le destinataire n'est pas le professeur.
 - Le destinataire n'est pas connu : on ne sait rien de ses codes, de ses implicites... On ignore s'il utilise les mêmes termes pour désigner les mêmes phénomènes.¹
 - L'émetteur n'est plus un individu mais une classe. Le message produit engage une responsabilité collective.
 - Lors de la cinquième séance, les élèves doivent se prononcer sur les propriétés en provenance d'une autre classe.
 - L'auteur du message mathématique n'est pas un professeur.
 - L'auteur n'est pas connu du destinataire. Comme lors de la séance précédente, des problèmes d'interprétation peuvent survenir si les codes diffèrent.
- Les objectifs principaux visés auront été pour les élèves :
- prendre conscience de la nécessité d'utiliser un langage précis, dénué autant que possible d'ambiguïtés.
 - réaliser l'utilité d'utiliser un langage commun pour désigner les mêmes objets et les mêmes phénomènes.
 - découvrir l'utilité de définir des concepts.

Le rapport au savoir

La pratique de l'activité proposée peut également conduire à une modification du rapport au savoir en mathématiques.

En français, les élèves pratiquent des activités dans lesquelles ils sont producteurs de texte, producteurs de savoir, et d'autres activités dans lesquelles ils étudient des textes produits par d'autres. En mathématiques, le savoir est toujours produit ou transmis par le professeur. Les élèves ne sont pas habitués à être en situation de producteurs.

L'activité sur les spirolatères les met donc dans une situation inédite.

¹ Par exemple : la classe émettrice du message ne sait pas si l'expression « le spirolatère boucle » a un sens pour la classe réceptrice.

L'activité de recherche peu cadrée est probablement nouvelle pour les élèves, ou pour le moins, peu courante. Elle ne rentre sans doute pas dans le cadre du contrat didactique usuel.

Selon les élèves, les effets de ce décalage peuvent être divers. Certains élèves prendront peut-être goût à cette activité, et peut-être cet intérêt débordera-t-il sur la matière. Inversement, certains élèves rejeteront peut-être cette activité qui ne leur paraîtra pas conforme, voire illégitime, dans le cadre de leur conception de la matière et de l'activité en classe de mathématiques.

Les résultats obtenus

Remarques générales

Le travail sur les spirolatères a plutôt plu aux élèves, même s'ils ont été déroutés au départ. On peut en dire autant du ressenti des professeurs expérimentateurs.

Par rapport à la nécessité de démontrer

L'expérience a été très riche.

De nombreux phénomènes ont été mis en évidence, qui permettent peut-être de mieux situer certaines résistances à l'apprentissage de la démonstration.

L'importance de l'auteur

Ce que les élèves savent les uns des autres a une influence. Dans une classe, on cherche systématiquement à réfuter les propriétés de la tête de classe, ailleurs on évite de contester la propriété d'un élève violent... Lors de la phase d'échanges entre classes, ce problème a disparu par méconnaissance des auteurs, en revanche un « esprit de corps » pousse parfois une classe à juger la production de l'autre avec condescendance.

La place délicate du contre-exemple

Les élèves ont bien perçu le rôle du contre-exemple dans la réfutation d'un énoncé. Ils ont acquis le réflexe de chercher un contre-exemple pour invalider, et celui de chercher si on pourrait en opposer un lorsqu'il s'agit de valider.

On peut toutefois remarquer qu'ils n'acceptent pas forcément facilement d'être pris en défaut sur leurs propres affirmations. Ils ont envie d'avoir « vu juste », quitte à refuser le contre-exemple qui les met en difficulté.²

Qu'est-ce qu'on donne et qu'est-ce qu'on garde ?

Les critères de choix des propositions à envoyer aux autres classes ont varié d'un endroit à l'autre : souci de ne communiquer que des propriétés certaines, même si elles sont très pauvres, ou souci de poser des questions, ou encore choix délibéré de ne pas donner ce que l'on a trouvé de mieux. Plus les élèves sont en difficulté, moins ils communiquent.

D'autres phénomènes amusants sont apparus : dans une classe une élève a tenté de s'approprier le résultat d'une autre en apportant une correction grammaticale à l'énoncé.

Ailleurs, un savant a été incompris : une élève avait trouvé toute seule une preuve du bouclage des spirolatères, quasiment en réinventant les vecteurs, son groupe n'a pas compris et a rejeté l'explication.

La place tardive de la démonstration

Dans cette activité, telle qu'elle est agencée, l'outil de démonstration arrive tard. Pour certaines classes, l'introduction a répondu à une attente. Jusque-là on ne pouvait que conjecturer ou réfuter.

Les meilleurs élèves, les meilleures classes, ont particulièrement apprécié cette phase.

² On a ainsi vu les mêmes élèves, pris en défaut sur une de leur propriétés par un contre-exemple, refuser l'argument en invoquant que le cas était si particulier qu'il ne méritait pas que l'on s'y attarde, mais brandir sans hésitation le même contre-exemple pour réfuter une propriété d'une autre classe !

Pour les autres, l'abondance d'exemples continue à valoir preuve. On peut se demander si la séquence spirolatères n'a pas renforcé ce travers.

En ce qui concerne les critères de choix

- Critère de vérité : c'est pour les élèves le critère le plus important, voire le seul.
- Critère d'utilité et d'économie : ce critère n'est pas repéré par les élèves, mais il est vrai qu'il ne peut se mesurer qu'après coup...
- Critère de généralité, de portée : il y a eu des progrès sur ce point au cours de la séquence. Les élèves ont produit volontiers des propriétés locales au tout début, puis ils ont cherché à étendre ces propriétés.
- Critère de « non-évidence » : dans certaines classes, on préfère proférer des évidences plutôt que de prendre le risque d'essayer un contre-exemple.

- Critère de précision : très peu de propriétés ont été rédigées d'une manière imprécise.
- Critère de non-redondance : la phase de tri en classe a généralement permis d'éviter les redites.
- Critère de force : ce critère a été employé quelquefois, lors du tri.

Au delà du plaisir que les élèves pourront éprouver face à cette activité de recherche, et au fait qu'elle se déroule en partie en groupes, peut-être découvriront-ils que les mathématiques ne sont pas seulement une matière où l'on apprend et l'on applique, mais aussi une matière où l'on cherche, où l'on découvre, où l'on confronte.

