

Le ruban de Möbius

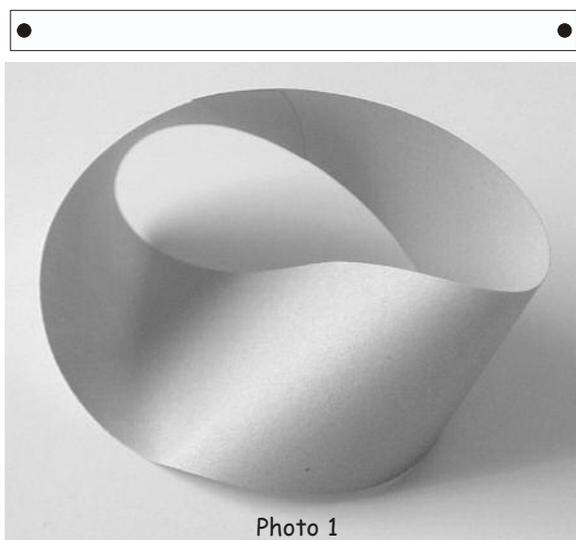
De surprises en surprises

Serge Parpay et Jean Fromentin

Les manipulations proposées dans cet article peuvent donner lieu à des activités de clubs ou d'ateliers mathématiques. Elles permettent d'entrevoir quelques petits problèmes de topologie. Certaines de ces activités ont déjà été proposées dans l'article : « Ouvrez le (ru)ban ! » écrit par Arnaud Gazagnes dans PLOT n° 4. Le lecteur pourra s'y reporter avec bonheur, les deux articles étant complémentaires.

Fabrication du ruban de Möbius

Pour réaliser un ruban de Möbius (photo 1), prendre une bande de papier, dessiner deux points, aux extrémités, sur une face. Après une torsion d'un demi-tour de la bande, coller les deux extrémités de telle sorte que les deux points soient au contact l'un de l'autre.



1^{ère} manipulation

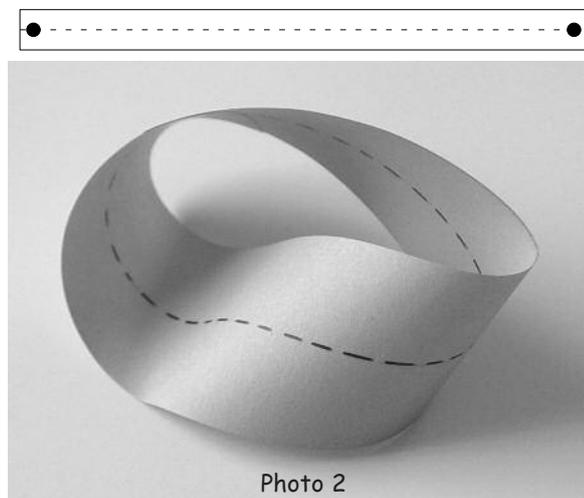
Avec un crayon, colorier (ou hachurer) de façon continue la surface. On constate que le ruban est entièrement colorié (ou hachuré). Ce ruban n'a qu'une « face ». On passe d'un point quelconque à un autre sans quitter la surface, sans franchir un bord, contrairement à un ruban ordinaire fermé sans torsion. De plus, si on

longe le bord, on revient au point de départ. Le ruban n'a qu'un « bord ».

2^{ème} manipulation

Couper un ruban de Möbius sur toute sa longueur, au milieu de la largeur (photo 2).

On peut tracer une ligne pointillée avant de fabriquer le ruban.



À la fin du découpage, on obtient un seul ruban, ce qui crée la surprise, quand on ne connaît pas le phénomène (photo 3). Le coloriage du ruban de façon continue à partir d'un point choisi conduit à une deuxième surprise : cette fois, une partie seulement du ruban est coloriée. Ce nouveau ruban est un ruban à deux faces (un ruban ordinaire en somme, mais avec une torsion d'un tour complet).

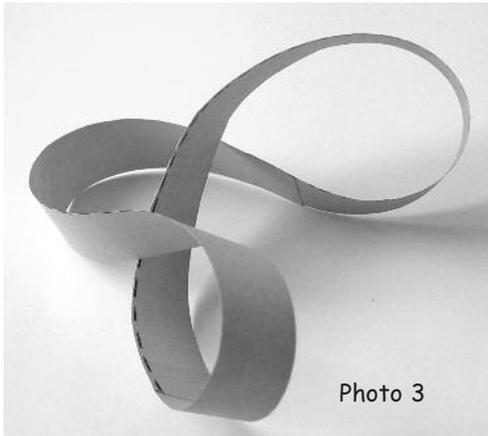
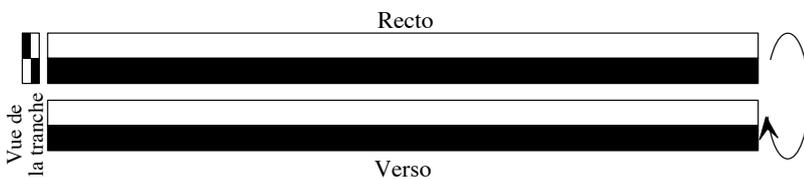


Photo 3

3^{ème} manipulation

Préparer une bande du modèle ci-dessous (juxtaposition de deux bandes de couleurs différentes). Réaliser le ruban de Möbius. En coupant le ruban suivant la ligne médiane, on retrouve le ruban de la deuxième manipulation avec deux faces, l'une d'une couleur et l'autre de l'autre couleur (photos 4 et 5).



celui de la deuxième manipulation ; les deux rubans sont entrelacés.

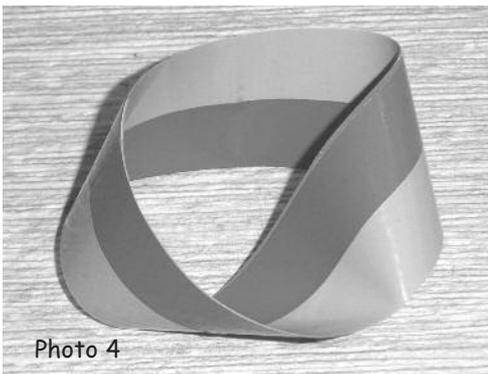


Photo 4

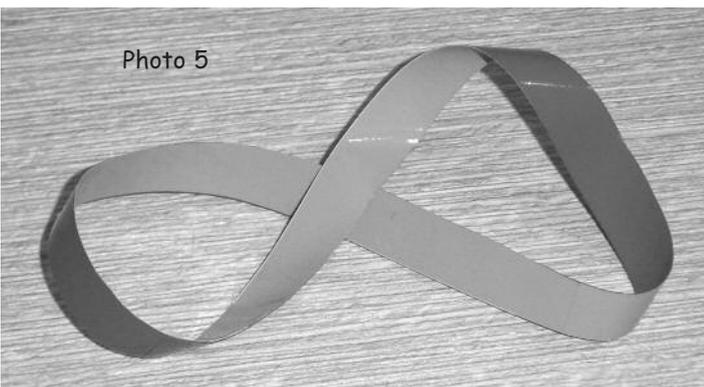
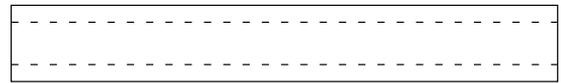


Photo 5

4^{ème} manipulation

Préparer un ruban de Möbius en dessinant sur chaque face de la bande de départ deux parallèles à égale distance des bords.

Construire le ruban (photo 6) et découper en



suivant les traits pointillés. On obtient deux rubans, ce qui crée encore la surprise pour ceux qui ne connaissent pas le phénomène (photo 7). Ce découpage revient à réduire la largeur du ruban de Möbius. Le ruban obtenu à partir de la bande centrale est donc aussi un ruban de Möbius et de la même longueur que le ruban de départ. Le deuxième ruban (de la largeur des bandes latérales) a une longueur double. C'est un ruban à deux faces comme

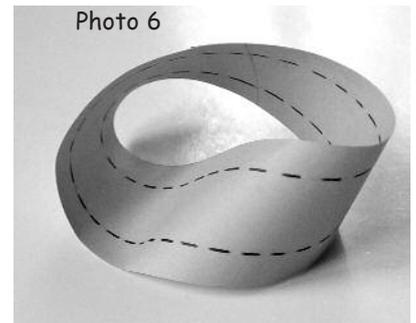


Photo 6

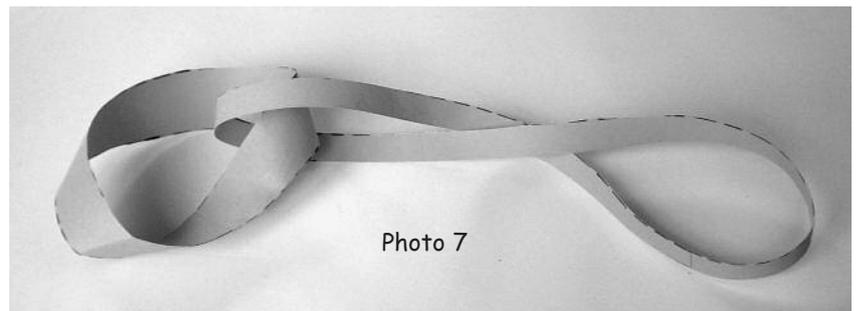
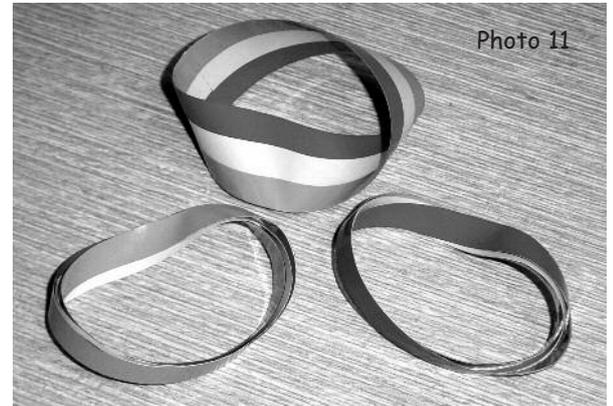
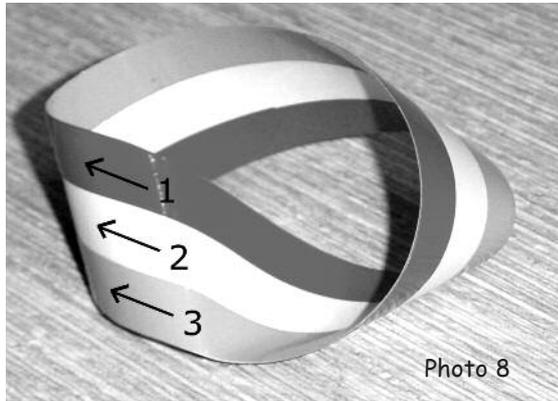
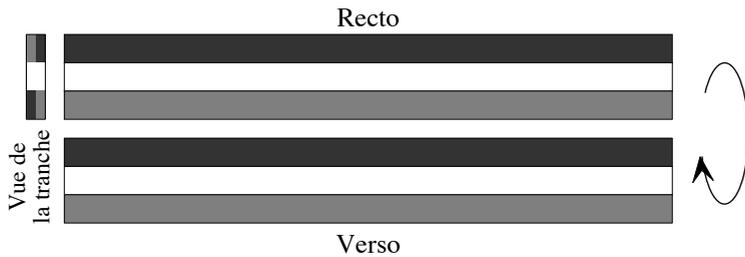


Photo 7

5^{ème} manipulation

Préparer un ruban de Möbius avec trois bandes de couleurs différentes ; on pourra mettre trois flèches 1, 2, 3 sur l'une des faces pour faciliter la manipulation (photo 8).



Les photos 8 à 11 figurent en couleur sur la page 3 de couverture.

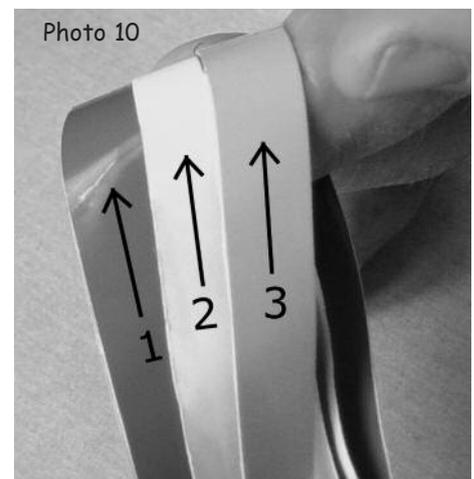
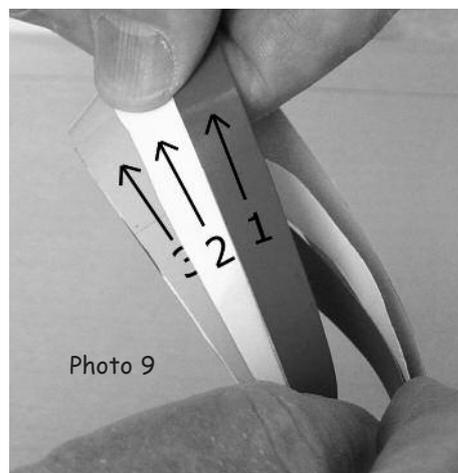
Découper le ruban comme dans la manipulation précédente. Le ruban le plus long a deux faces de couleurs différentes 1 et 3. Le deuxième ruban, celui de Möbius, est de la couleur centrale 2.

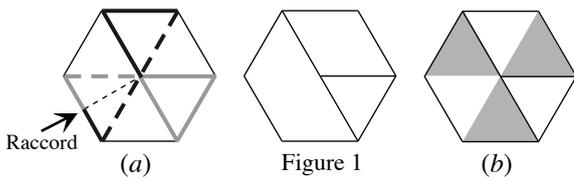
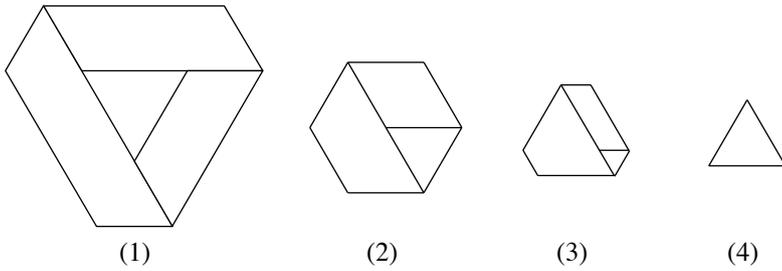
On peut alors « habiller » le ruban de Möbius obtenu (c'est-à-dire le recouvrir complètement) à l'aide du ruban de longueur double, soit de la couleur 1, soit de la couleur 3. Pour cela, placer le ruban de Möbius 2 entre les deux parties 1 et 3 de l'autre ruban comme le montre la photo 9 ci-dessous et « enrôler » ce ruban sur le ruban de Möbius. Le ruban de Möbius est alors « habillé » de la couleur 1. En inversant les couleurs comme le montre la

6^{ème} manipulation

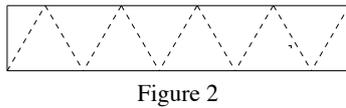
En « aplatissant régulièrement » un ruban de Möbius, on obtient, pour une même largeur de bande, un hexagone troué ou plein suivant la longueur de la bande [(1), (2) et (3)]. On peut aussi obtenir un triangle (4) (dessins page suivante). Pour obtenir un ruban de Möbius aplati suivant la figure (2) (hexagone régulier), il faut déterminer la longueur de la bande initiale.

La figure 1(a) matérialise sur l'hexagone les deux bords de la bande initiale (en noir et en gris). En choisissant la longueur du côté du triangle équilatéral comme unité, la longueur de la bande est de 4,5.

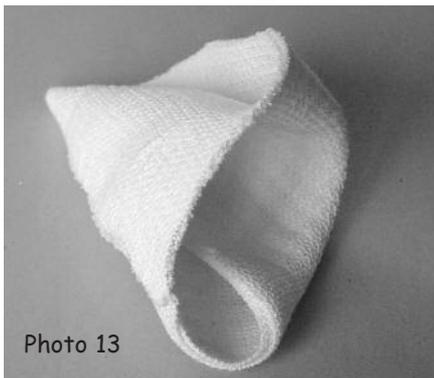
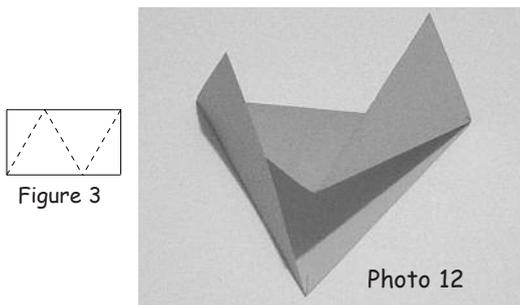




La figure 1(b) montre les parties de l'hexagone qui comportent deux épaisseurs de bande (parties grisées). On observe qu'il y a 9 triangles équilatéraux, ce qui aboutit à la même conclusion (figure 2).

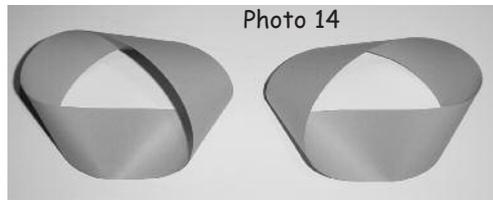
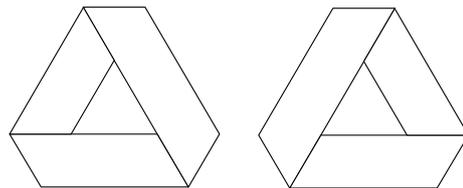


S'il est aisé de trouver la longueur de la bande qui permet d'obtenir par « aplatissement » le triangle équilatéral, (figure 3 et photo 12), il est plus difficile de réaliser le ruban de Möbius correspondant (photo 13).

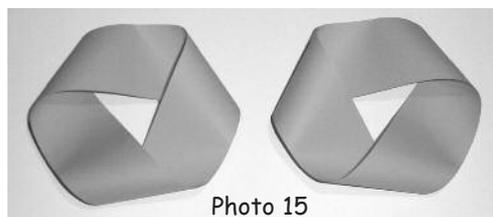
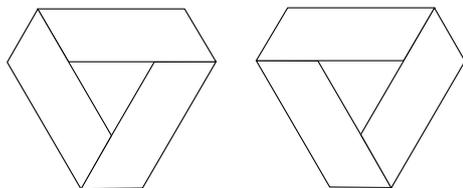


7^{ème} manipulation

Les deux hexagones ci-dessous ont été obtenus en « aplatissement régulier » les rubans de Möbius de la photo 14. Ces deux rubans sont énantiomorphes (symétriques par rapport à un plan) ; les torsions d'un demi-tour ont été faites dans un sens et dans l'autre (photo 14).



Les deux autres hexagones ci-dessous ont été obtenus en « aplatissement régulier » les deux rubans fermés de la photo 15. Sont-ils des rubans de Möbius ?



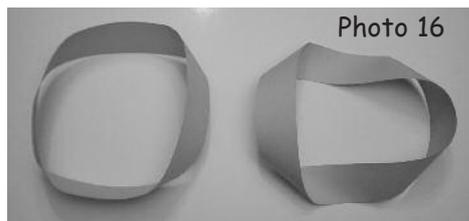
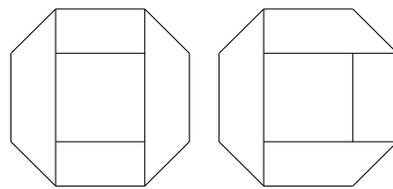
Prolongement

8^{ème} manipulation : de l'hexagone à l'octogone

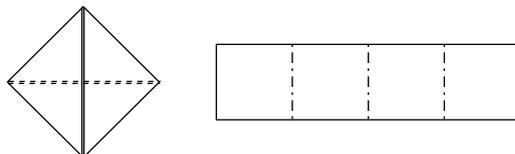


August Ferdinand Möbius (1790-1868) est un mathématicien et astronome allemand. Il s'intéressa particulièrement à la topologie. C'est dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences qu'il a décrit le ruban qui porte son nom.

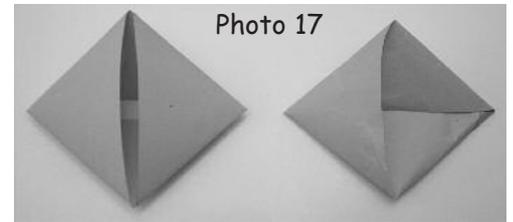
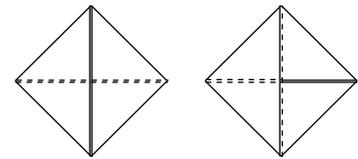
Les deux octogones ci-dessous ont été obtenus en « aplatissant régulièrement » deux rubans ordinaires, c'est-à-dire obtenus à partir d'une bande fermée sans torsion. La photo 16 montre ces rubans préparés chacun pour le pliage désiré.



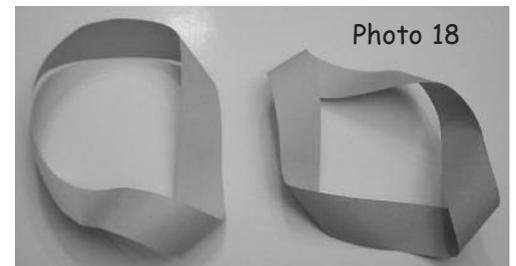
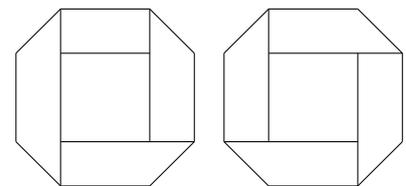
De la même façon qu'on a obtenu un triangle équilatéral en aplatissant un ruban de Möbius, on peut obtenir un carré en aplatissant un ruban ordinaire. La longueur de la bande correspond alors à quatre carrés juxtaposés.



Une fois le ruban réalisé, on peut obtenir les deux types de pliages précédents (dessins ci-dessous), le deuxième pliage étant un peu plus difficile à obtenir pratiquement (photo 17).



Les deux autres octogones ci-dessous peuvent être obtenus, le premier à partir d'une bande fermée en faisant une torsion d'un tour complet et le deuxième à partir d'une bande fermée en faisant une torsion de deux tours complets (photo 18).



La topologie permet de justifier tous les résultats précédents. Voici quelques livres intéressants à consulter sur le sujet :

- Les mathématiques et leurs applications, E.Galion, Cedic 1972
 - Les progrès des mathématiques, Bibliothèque Pour la science, Belin 1981
 - Le topologicon, Jean-Pierre Petit
- <http://www.savoir-sans-frontieres.com>

En hommage à notre ami Claude Pagano

Pour terminer cet article, nous ne résistons pas au plaisir de vous présenter le « Slip de Möbius » et autres nœuds tressés par Claude Pagano qui fut un militant très actif de l'APMEP, ayant beaucoup travaillé sur les nœuds et tresses ainsi que sur les Pentaminos. Voici des photos sur la page ci-contre.