Les indivisibles

Henry Plane

Une animation du tracé de la demi-cycloïde et de la demi-sinusoïde figure sur le site de l'APMEP, PLOT 20, rubrique « Histoire des maths ».

Certains voient dans les « indivisibles » l'œuvre des précurseurs du calcul infinitésimal au début du 17ème siècle, d'autres une voie qui était condamnée d'avance. L'objet de cet article n'est pas d'animer ce débat mais de montrer ce que fut ce procédé, à base géométrique, du calcul de l'aire de certaines surfaces.

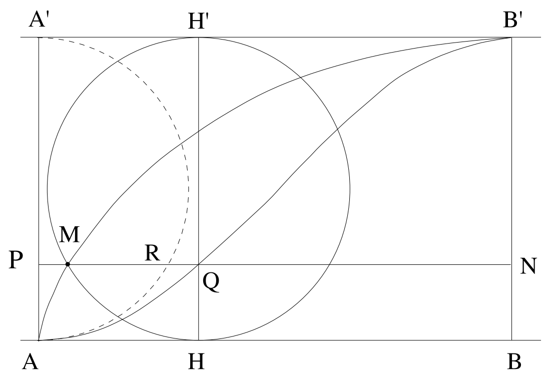
Dès 1605, Kepler imaginait de voir dans une surface une infinité de lignes comme se voit une infinité de points dans une ligne.

Ce fut Bonaventure Cavalieri, professeur de mathématiques à Bologne où il introduisit l'usage des logarithmes, qui publia cette méthode en 1635 dans « *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promata* », mais il l'exposait dès 1629. Mersenne, après son voyage en Italie (1644), la fit connaître à Roberval, Pascal et bien d'autres. Toutefois, Guldin la combattit, ce qui conduisit Cavalieri à préciser son raisonnement dans « *Exercitationes geometricæ sex* » (1647). Il y écrit : « *Nous considérerons les figures planes comme formées de fils parallèles (comme les toiles) et les solides composés de feuilles (comme les livres). Mais, tandis que dans les toiles les fils et dans les livres les feuillets sont en nombre fini, parce qu'ils ont une certaine épaisseur, pour nous le nombre en est indéfini, parce que nous les considérons sans épaisseur* ».

À partir de cette hypothèse, on peut comparer, entre elles, diverses surfaces. Cela conduisit à plusieurs réussites pratiques, mais n'évita pas un certain manque de rigueur car, en ajoutant des segments sans épaisseur les uns aux autres, comment arriver à composer une surface ayant une épaisseur ?

Essayons, avec notre écriture, de saisir cette méthode et son caractère géométrique, méthode qui cependant occupa les chercheurs pendant un demi-siècle.

Calculons, avec Roberval, l'aire « sous la cycloïde » qu'il nommait « trochoïde ».



Lorsque le cercle de diamètre HH' (= 2r) roule sans glisser de A à B (AB = πr), le point M de celui-ci décrit un demi - arc de cycloïde AMB'.

La parallèle à (AB) menée par M recoupe [AA'] en P, [BB'] en N, [HH'] en Q et le demi-cercle de diamètre AA' en R.
Il est clair que PR = MQ donc que :
MN = MQ + QN = PR + QN.

La surface sous la demi - cycloïde AMB' est comme balayée par l'indivisible MN donc son aire est égale à la somme de celles des surfaces balayées par PR et QN en tant qu'indivisibles.

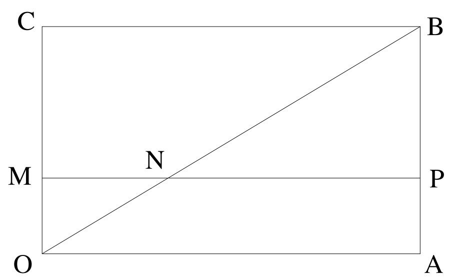
PR balaye le demi-cercle de diamètre [AA'] d'aire $\frac{1}{2}\pi r^2$. QH est le sinus associé à l'arc HM et Q décrit donc un arc de sinusoïde.

QN balaye la surface sous la sinusoïde AQB' décrite par Q lorsque le cercle roule de A à B (Roberval l'appelait la « compagne de la cycloïde »). Du fait des symétries, l'aire de cette dernière surface est la moitié de celle du rectangle ABB'A', donc $\frac{1}{2}AB \times BB' = \frac{1}{2}\pi r \times 2r = \pi r^2$.

L'aire sous la demi-cycloïde vaut $\frac{3}{2}\pi r^2$.
L'aire sous la cycloïde est donc le triple de celle du cercle qui l'engendre.

En ce qui concerne Cavalieri lui-même, on peut se faire, en usant toujours des expressions qui sont nôtres aujourd'hui, une idée de sa méthode.

On considère un rectangle OABC et sa diagonale OB. Dans une révolution autour de OC, le triangle OBC engendre un cône et le rectangle un cylindre.



Soit une parallèle à (OA) qui coupe [OC] en M, [OB] en N et [AB] en P.
M varie de O à C.
On peut considérer que MN est un indivisible - disque qui balaye le cône, alors que MP en est un autre qui balaye le cylindre.
Le rapport des volumes de chaque tranche est égal à celui des aires des disques correspondants, donc $\frac{MN^2}{MP^2}$.

Comme ces deux solides ont même hauteur [OC], il y a le même nombre de tranches dans les deux solides.
Si on a partagé OB en n parties égales, au point M, le $x^{\text{ième}}$ point, on a $MN = x\frac{OA}{n}$, x variant de 0 à n.
Il y aura donc n valeurs des indivisibles MN et MP entrant dans le calcul.
Pour le cône, leur somme est
$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\frac{OA^2}{n^2}$.

Pour le cylindre, il y en a n qui comptent toutes pour n^2.
En effet, $MP = OA = n\frac{OA}{n}$.

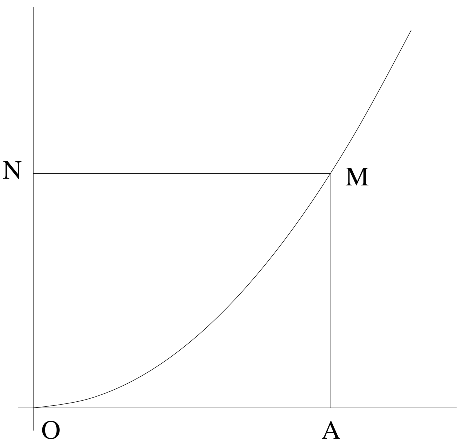
La somme des carrés est connue de Cavalieri.
On aura pour le cône

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= n^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

et pour le cylindre n x $n^2 = n^3$.

Le rapport est donc $\frac{S}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Le volume du cône est bien le tiers du cylindre, ce qui valide le procédé.



Cavalieri interprète également ce résultat comme l'aire sous la parabole définie par $MN^2 = ON$ ou $AM = OA^2$ donc, pour nous, sous $y = x^2$. Il trouve ainsi une aire de $\frac{x^3}{3}$.

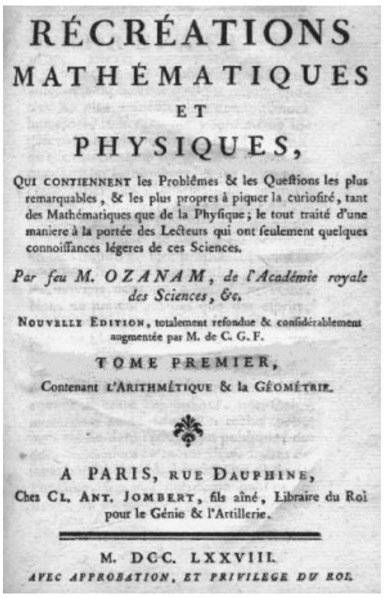
Il développe des calculs semblables pour x^3 et x^4 et trouve respectivement $\frac{x^4}{4}$ et $\frac{x^5}{5}$.

Alors, il conjecture que pour x^p, il aura $\frac{x^{p+1}}{p+1}$.

En effet, il ne dispose pas d'autres sommes de puissances ; il lui aurait fallu connaître la « sommation des puissances numériques » de Pascal que l'on date de 1654.

Cavalieri mourut en 1647 ; il fut des amis fidèles de Galilée.

Pour un dictionnaire des mathématiciens



RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problêmes & les Queſtions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curioſité, tant des Mathématiques que de la Phyſique ; le tout traité d'une maniere à la portée des Lecteurs qui ont ſeulement quelques connoiſſances légeres de ces Sciences.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale des Sciences, &c.

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & conſidérablement augmentée par M. de C. G. F.

TOME PREMIER,

Contenant L'ARITHMÉTIQUE & la GÉOMÉTRIE.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Jacques OZANAM (1640-1717)

Il publia de nombreux ouvrages : « Géométrie pratique » (1684), « Trigonométrie rectiligne et sphérique » (1685), un volumineux cours de mathématiques (1692), un cours d'algèbre (1702).
Eurent un gros succès son « Dictionnaire de mathématiques » (1690) et ses « Récréations matthématiques et physiques » (1699).
Il fut membre de l'Académie des sciences et est l'arrière-grand-oncle de Frédéric Ozanam, l'écrivain démocrate-chrétien du dix-neuvième siècle.