La phobie des grandeurs ?

François Colmez

Enseignant à l'université et ancien directeur de l'IREM de Paris 7 Denis Diderot, ancien président de l'APMEP et responsable de la commission « MOTS », François Colmez s'est beaucoup investi dans la formation des enseignants, n'hésitant pas à aller dans les classes du primaire et du secondaire pour confronter ses idées à la réalité du terrain ; les brochures Élem-Math de l'APMEP lui doivent beaucoup.
Toujours au sein de l'APMEP, il a participé activement à la réalisation de la brochure n°46 (1983) : « Grandeur-Mesure », citée en référence dans le document d'accompagnement « Grandeurs et mesures » des nouveaux programmes du collège.
François Colmez est également membre du groupe « Activités mathématiques au collège » dont le dernier article sur les décimaux est paru dans le Bulletin Vert n° 472.

A travers mon expérience personnelle, ce texte porte témoignage sur l'enseignement des grandeurs et des mesures depuis 1968.

Mon intérêt pour cette question a été éveillé, pendant l'effervescence de mai 68, lors de réunions avec des instituteurs de ma banlieue, prolongées à la rentrée par des séances de travail hebdomadaires. Parmi tous les sujets d'enseignement délicats qui furent évoqués, il y avait les *nombres concrets*.
Cela m'a replongé dans mes souvenirs de la communale où je n'avais jamais compris pourquoi l'une des deux écritures 3 x 4 cm et 4 cm x 3 était licite et non l'autre. Je ne sais d'ailleurs toujours pas laquelle était interdite et la raison pour laquelle elle l'était.

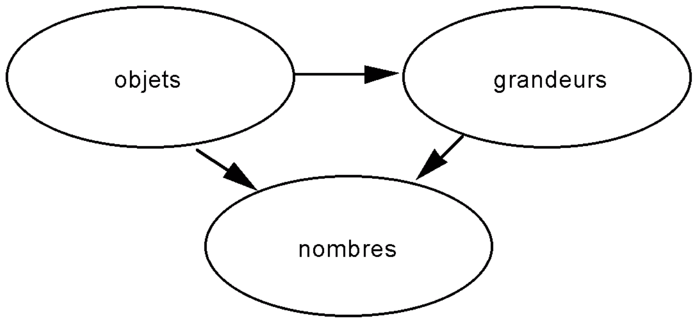
Dans les programmes pour l'école élémentaire que la commission Lichnérowicz a présentés à cette époque, l'expression *nombre concret* n'apparaît évidemment pas ; mais ce programme, comme les programmes du collège qui suivront, privilégie les nombres au détriment des grandeurs elles-mêmes. Dans certains manuels de collège qui mettent en oeuvre les nouveaux programmes des années 70, cette absence des grandeurs tourne à l'absurde quand il s'agit d'expliquer ce qu'est un changement d'unité !
Je dois avouer que j'ai moi-même participé à cette phobie des grandeurs, au début des années 70.

Elle illustre une difficulté inhérente à l'enseignement des mathématiques : l'articulation entre le nombre, objet « pur » et abstrait, et ses différents avatars, ces choses pas très propres, dont on ne sait pas très bien la vraie nature mais qui sont nécessaires aux utilisateurs, les grandeurs. C'est un point central car il régit les rapports des mathématiques aux autres sciences utilisatrices. A cause des abus antérieurs, les grandeurs furent un temps rejetées du champ des mathématiques, Ce qui a contribué, d'une certaine façon, à leur isolement.

Il est pourtant possible de construire de façon rigoureuse le rapport entre ces trois notions : objets, grandeurs, nombres. J'ai d'ailleurs eu souvent l'occasion d'en parler lors de réunions inter-IREM.

Les trois protagonistes : objets, grandeurs et nombres

Pour les lecteurs les plus jeunes, qui n'ont pas connu l'époque de ces débats passionnés, mais qui en croisent les traces dans leur enseignement de tous les jours, voilà de quoi il s'agit.
Je vais d'abord rappeler le diagramme qui, de toutes façons, est un guide dans la construction des notions de grandeur et de mesure.



Dans ce diagramme, les flèches sont des applications ; l'application de l'ensemble des objets vers l'ensemble des nombres est la composée des deux autres.
L'application de l'ensemble des objets vers l'ensemble des grandeurs est uniquement déterminée.
Au contraire, les deux autres applications dépendent du choix d'un objet étalon dont la grandeur est l'unité par convention.

L'exemple des longueurs

Pour illustrer ce diagramme et pour fixer les idées, je vais expliciter le cas des longueurs.
La démarche mathématique à laquelle on se réfère souvent est la suivante (à des variantes près) :
Un plan affine euclidien étant donné, les objets sont les segments de ce plan. Une relation d'équivalence est naturellement associée au groupe des isométries de ce plan. Deux segments seront équivalents, pour cette relation, s'il existe une isométrie transformant l'un en l'autre. Chaque grandeur est alors une classe d'équivalence. Ainsi, ici, la longueur du segment S est l'ensemble de tous les segments isométriques à S. Cette construction modélise bien la notion intuitive de longueur comme propriété commune à tout un ensemble de segments.

Ensuite, le passage de la longueur au nombre réel positif, une fois l'unité choisie, nous est plus familier :
Soit un segment E choisi comme étalon et un segment S à mesurer. On peut, par exemple, procéder ainsi : on appelle S' un segment équivalent à S parallèle à E. On appelle e l'un des deux vecteurs déterminés par E et s' l'un des deux vecteurs déterminé par S' ; s' étant colinéaire à e, il existe un réel k tel que s' = k e, alors la mesure de S est |k|.
Bien sûr, il faut vérifier que le nombre obtenu ne dépend pas de tous les choix faits en cours de route et que l'application qui en résulte, une fois choisi l'ensemble de nombres, est compatible avec la relation d'équivalence. Le plus petit ensemble de nombres possible est l'ensemble des réels positifs. Des démarches analogues permettent de définir la somme de deux longueurs et le produit d'une longueur par un réel positif de façon à établir finalement que l'ensemble des longueurs est isomorphe à l'ensemble des réels positifs pour l'ordre, la somme et le produit par un scalaire positif. Mais cet isomorphisme dépend de l'étalon E.

Si on imagine de suivre avec les élèves la procédure évoquée, il est impossible de leur enseigner les longueurs. Mais c'est un peu comme si on envisageait d'enseigner l'arithmétique élémentaire uniquement en utilisant les axiomes de Peano.
D'autres démarches sont heureusement possibles, calquées sur la construction des nombres par la manipulation de collections. Et, comme cette dernière, ce sont des démarches de modélisation des actions que les élèves entreprennent. Je vais en donner un exemple.

Amener les enfants à la notion de grandeur

L'enseignement d'une grandeur conduit à introduire successivement les trois éléments en jeu : les objets, les grandeurs et les nombres.
La comparaison des objets selon un protocole expérimental, qui se précise au cours de l'activité, amène aux grandeurs dont l'ensemble est doté progressivement d'un ordre et d'une structure algébrique. Puis le choix arbitraire d'un étalon permet la mise en correspondance bijective des grandeurs avec des nombres. Une problématique d'encadrement et de précision, naturelle dans ce contexte, oblige à l'enrichissement de l'ensemble de nombres. Il est alors temps d'utiliser les étalons usuels et les notations des unités correspondantes.

La comparaison des objets porte sur ce que j'appelle ici, d'une manière générale, « l'encombrement ». Elle repose sur le postulat suivant :
Les manipulations que l'on fait n'altèrent pas l'encombrement ; ce qui veut dire :

- l'encombrement d'un objet ne varie pas pendant la manipulation, ou du moins cette variation n'est pas du domaine du sensible ;
- l'encombrement d'un objet partagé en plusieurs morceaux se répartit entre ces morceaux ; si ces morceaux sont réorganisés d'une nouvelle manière, le nouvel assemblage a toujours le même encombrement.

Bien évidemment, pour chaque type de grandeur, on précise par un vocabulaire adapté le type d'encombrement.

- Ainsi pour la longueur, on cherche à déterminer si tel objet « est moins long » (ou « est plus long » ou « est aussi long ») que tel autre.
- Pour l'aire, je propose, reprenant un terme ancien : « est moins étendu » ou « occupe moins de place ».
- Pour le volume, selon l'aspect retenu, soit « est moins volumineux », soit « contient moins » (de liquide, de sable…)

En fait, ces différents liens verbaux désignent des relations de préordre et les grandeurs sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence associée.
Comme on a pu le constater naguère*, l'ensemble quotient n'est pas accessible aux élèves du Collège ; mais on peut le remplacer par un changement de vocables en introduisant les substantifs longueurs, aires, volumes, masses ou capacités.

* du temps des « Maths Modernes »

Des excès de jadis à un juste équilibre

Dans des classes de CE et surtout de CM, il m'est arrivé de proposer aux élèves un travail de comparaison et de mesurage, par ateliers portant simultanément sur

longueur, masse et capacité. Dans ces activités, je m'étais arrangé pour ne pas expliciter l'ensemble des grandeurs et sa structure dans la modélisation.
Les élèves présentaient leurs résultats sous forme de tableaux dont la première ligne contenait des mesures ou des encadrements de mesures pour une unité donnée, telle que :

entre 0 et 1	entre 1 et 2	entre 2 et 3	entre 3 et 4
1	3	2	4

Bien évidemment, la plupart des objets étaient « mesurés » par des encadrements ; ce qui a donné l'occasion aux élèves d'expliciter la propriété : *deux objets sont de grandeurs différentes si dans le mesurage avec une unité donnée ils sont de mesures différentes*. C'est ainsi que des élèves ont pu dire : *avec la première unité les traits A et B ont la même longueur, mais avec la deuxième unité on sait que A est le plus petit*. On a également utilisé la propriété transposée : *deux objets sont de même grandeur si, pour n'importe quelle unité, ils ont la même mesure*. Mais cette dernière phrase traduit un dépit, car le désir des élèves est de départager les ex æquo.
Je ne renie pas ces activités qui ont été très formatrices pour les élèves et instructives pour moi. Elles ont fait l'objet de deux émissions de la télévision scolaire à l'intention des enseignants.

Ceci dit, j'ai tout de même rapidement éprouvé des regrets par rapport à mon ostracisme sur les grandeurs. J'ai participé à des travaux interdisciplinaires, en particulier mathématiques-sciences physiques. J'ai représenté l'APMEP à la commission Lagarrigue, commission ministérielle analogue à la commission Lichnérowicz pour le renouvellement de l'enseignement des sciences physiques, et j'ai participé aux travaux du groupe expérimental de cette commission dirigé par G.Delacote.

Ce fut pour moi l'occasion de fréquenter P.Rougée, mécanicien, directeur de l'IREM Paris Nord, qui a écrit pour le Bulletin Vert plusieurs articles sur les concepts mathématiques utilisés en physique (tels que vecteurs, glisseurs ou torseurs) et en 1974 (n°293) un article important intitulé : *Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du Physicien*.

Une petite partie de cet article montre comment il est naturel de réintégrer les grandeurs dans le giron des mathématiques, sans pour autant qu'il soit nécessaire de les considérer comme des classes d'équivalence d'objets.
Ceci est important car les ensembles et les structures quotient sont très difficiles à conceptualiser pour les élèves, même en fin de Lycée.
Cela explique sans doute pourquoi, pendant cette période, le souci de construction ensembliste ne permettait pas d'introduire la notion de grandeur avec toute la rigueur que certains auraient souhaitée

Cependant, les objets à mesurer étaient définis avec précision ; précision quelquefois excessive comme dans le cas des secteurs de plans (avec ou sans le sommet ou les bords, réunion ou intersection de « drapeaux »…). Et, au moins pendant quelques années à partir de 1970, les

enseignants dans leur ensemble ont fait attention à bien distinguer les objets, les grandeurs et les mesures.
Ce souci est encore présent pour les longueurs ; pourquoi en ce qui concerne les angles en est-on revenu depuis plus de trente ans aux confusions antérieures*, en utilisant le même mot pour les trois concepts ? Le groupe MOTS a plusieurs fois déploré cet état de fait.

* Une émission de la télévision scolaire s'intitulait l'imbroglio des angles (en 1966)

Et aujourd'hui ?

Programmes actuels

Cette dernière partie est un complément de la rédaction de PLOT.

A l'heure actuelle, grandeurs et mesures ont toute leur place, dans les programmes de mathématiques de l'école primaire comme dans ceux du collège. Il n'est bien sûr pas (plus !) question de donner une définition abstraite des grandeurs utilisées, mais on s'efforce de leur donner du sens à travers des activités et des manipulations et on se familiarise avec leur utilisation.
Longueurs, masses, contenances, durées font l'objet d'une première approche en cycle 2. Ensuite, les connaissances en ce domaine se complètent et se structurent en cycle 3 et pendant toutes les années collège.

Les programmes du cycle 3 précisent :
L'essentiel des activités concerne la résolution de problèmes « concrets », réels ou évoqués, en utilisant des procédés directs, des instruments de mesure, des estimations ou des informations données avec les unités usuelles.

Ou, plus loin :
La notion d'aire est mise en place, notamment par des activités de classement et rangement de surfaces qui précèdent les activités de mesurage avec une unité choisie.
Ces alinéas montrent bien le souci de construire la notion de grandeur avec progressivité et d'éviter de se limiter ou de passer trop vite au travail sur la mesure. Même si les mathématiciens sont plus à l'aise au pays des nombres, ce sont les grandeurs qui font leur lien premier avec le reste du monde.
L'introduction des rubriques « grandeurs et mesures » des programmes du collège l'exprime bien. On trouve par exemple dans le programme de troisième :
Les situations mettant en jeu des grandeurs sont souvent empruntées à la vie courante (aires de terrains, volumes de gaz, de liquides, vitesse, débits, coûts,…) mais aussi à d'autres disciplines, notamment scientifiques, et permettent l'interaction entre les mathématiques et d'autres domaines. Elles contribuent d'une manière indispensable à une compréhension globale des enseignements scientifiques et à celle des mathématiques en leur sein.

Un exemple de construction du concept d'aire

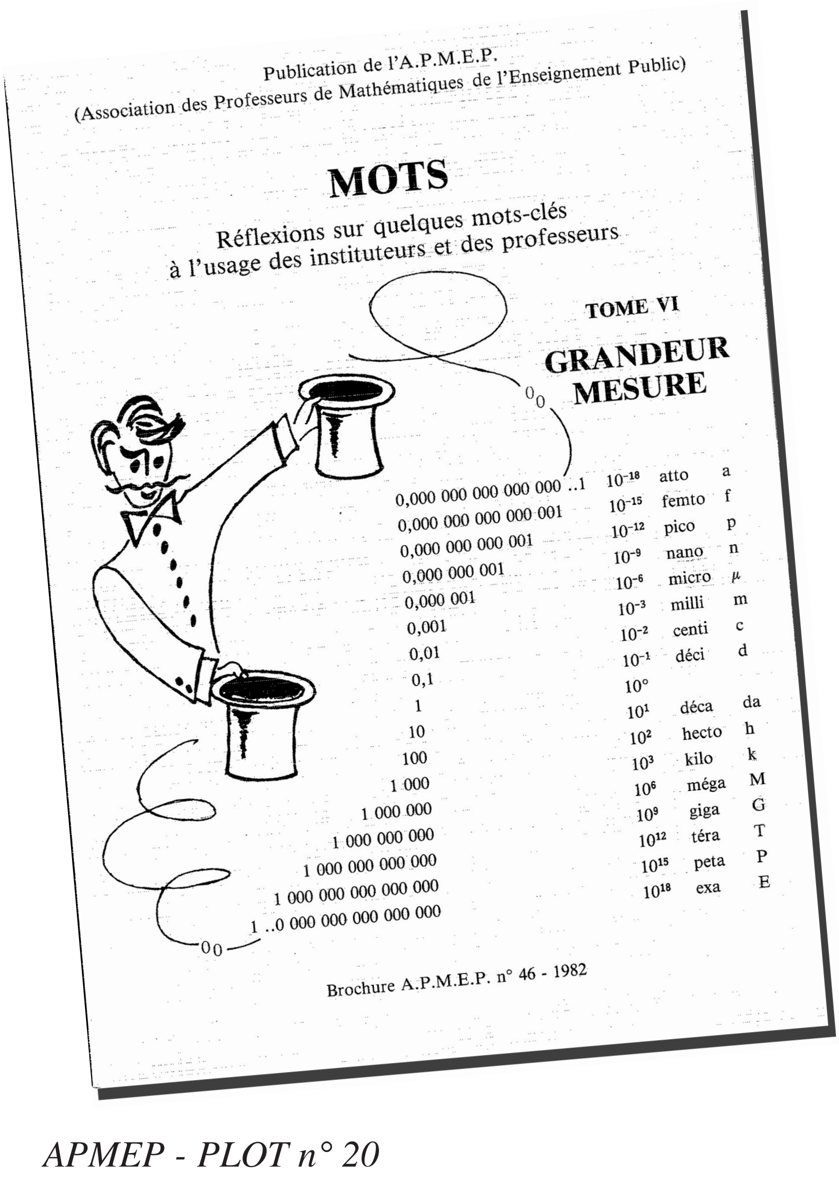
Dans un article très complet mais trop long pour être reproduit dans PLOT, François Colmez propose un ensemble d'activités conduisant à la construction du concept *d'aire* avec des élèves de cycle 3.

Il décrit un ensemble d'activités destinées aux élèves pour construire la grandeur aire par comparaison d'objets, la différencier de la grandeur *périmètre*, la relier à la grandeur *masse*, amener l'élève à la mesure à partir de pavages avec des carreaux rectangulaires, envisager enfin l'effet des agrandissements réductions sur les aires.

L'idée directrice de cette suite d'activités est la suivante : l'aire est une grandeur en tant que telle ; l'aire est aussi une grandeur produit. Le premier aspect est trop souvent occulté au profit du second. Ce qui produit un ensemble d'erreurs fréquentes parmi lesquelles on trouve :

- confusion entre longueur du bord d'une surface et aire de cette surface, ou du moins l'idée que ces deux grandeurs varient dans le même sens ;
- remplacement dans une formule d'un produit par une somme ;
- dans un agrandissement, multiplication de l'aire par le rapport d'agrandissement ;
- l'aire d'un parallélogramme comme produit des longueurs de deux côtés consécutifs.

Vous trouverez cet article en ligne sur le site de l'APMEP, rubrique PLOT n° 20.



En 1982 le groupe MOTS publiait le tome VI intitulé *Grandeur, Mesure*, brochure, qui n'aurait pas vu le jour sans la compétence et le dévouement de Jean-Maurice Chevallier (décédé en 1990). Il me semble que cette brochure a gardé tout son intérêt.

Elle est disponible, à l'APMEP, brochure numéro 46, pour 5 euros (+ 3 euros de frais de port).