TABET LARA – TS1 Le 02/02/05

Raya m'a à un moment appelé pour me demander si l'explicat théorique suffisait pour donner l'expression de la suite trouvée. Je lui ai répondu que je croyais que oui et que je ne voyais pas d'explication mathématique possible.

Elle me demanda ensuite si une expression de la suite par récurrence répondait véritablement à la question. Je lui ai donc rappelé le point méthode distribué au cours du premier trimestre et si on crée une suite géométrique (V_n) telle que

$$V_n = U_n - \frac{1}{1-2} = U_n + 1$$

$V_0 = 1$

$V_1 = 2$

$V_2 = 4$

$V_3 = 8$

(V_n) est donc une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

$V_n = 2^n$

Par suite, (U_n) peut être défini par $U_n = 2^n - 1$.

Avec un quadrillage et une équerre

Henry Plane

Résolution de l'équation $x^2 + px + q$ à l'aide d'un quadrillage et d'une équerre.
Précisons : une équerre à angle droit, comme le quadrillage.

Sur un quadrillage de centre O, situons les points A, B, P et Q tels que

$\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 1$, OA orthogonal à OB,

$\overline{AP} = p\overline{OB}$, $\overline{QP} = -q\overline{OA}$.

Cherchons alors à placer l'équerre avec son sommet de l'angle droit sur (AP), un côté passant par O et l'autre par Q.
Si cela est possible, ce sommet M est tel que $\overline{MA}$ est racine de l'équation.

En effet, calculons OQ^2 de deux manières.

$OQ^2 = (\overline{OA} + \overline{PQ})^2 + AP^2 = (1 - q)^2 + p^2$

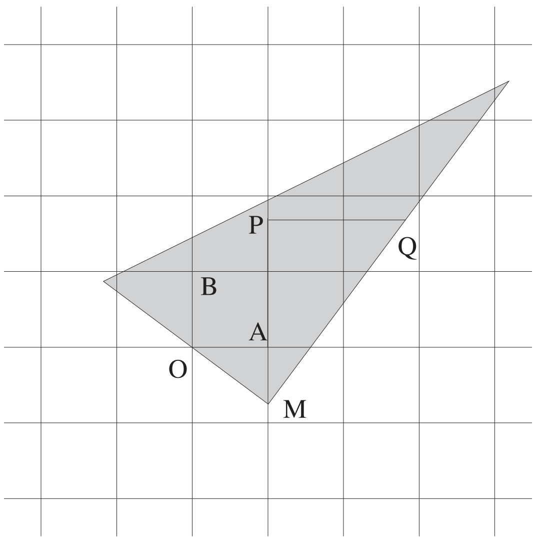


Figure avec $p > 0$, $q < 0$

$$\begin{aligned}\text{ou }\ OQ^2 &= OM^2 + MQ^2\\ &= (OA^2 + AM^2) + (MP^2 + PQ^2)\\ &= OA^2 + AM^2 + (\overline{AP} - \overline{AM})^2 + PQ^2\\ &= 1 + AM^2 + (p - \overline{AM})^2 + q^2\end{aligned}$$

En égalant ces deux expressions, il vient :

$$1 + 2AM^2 + p^2 - 2p\overline{AM} + q^2 = 1 - 2q + q^2 + p^2$$

soit : $MA^2 + p\overline{MA} + q = 0.$

$\overline{MA}$ est bien racine de l'équation étudiée.

Peut-être existe-t-il une autre position de l'équerre, autrement dit plusieurs triangles OQM rectangles en M et dont le sommet M appartient à (AP) ?

Discussion

Entre en jeu le cercle de diamètre OQ.

- Si O et Q sont de part et d'autre de la droite (AP) (q négatif), il y a deux intersections, donc deux racines.
- Si O et Q sont d'un même côté de (AP) (q positif), il n'y a intersection de (AP) et du cercle que si la distance de son centre Z à (AP) est inférieure à son rayon.

Distance de Z à (AP) :

$$\frac{1}{2}(OA + QP) = \frac{1}{2}|1 + q|$$

Rayon :

$$\frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - q^2) + p^2}$$

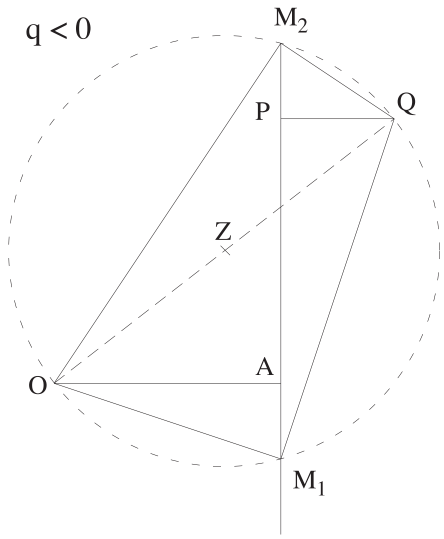
Il faut donc :

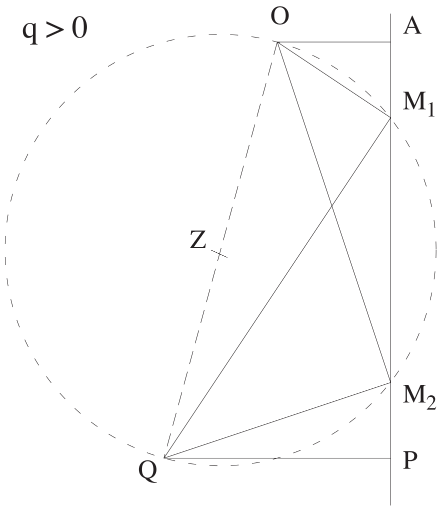
$$\frac{1}{2}|1 + q| \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1 - q)^2 + p^2}$$

$$\text{ou}\ (1 + q)^2 \leq (1 - q)^2 + p^2$$

On retrouve bien $4\,q \leq p^2$.

Si vous vous croyez autorisé à user d'un instrument appelé « compas » et à condition de déterminer le milieu de [OQ], il suffira de tracer ce cercle pour obtenir les éventuels points solutions. Papier millimétré et bonne équerre donnent des approximations acceptables.





En ce qui concerne l'équerre à dessin, il convient de noter que son usage n'est pas très ancien car sa fabrication est assez délicate manuellement, son orthogonalité étant souvent mise en doute. L'équerre sert essentiellement à tracer des parallèles. Sa dénomination apparaît en bas latin — exquadra — en lien avec le carré. La notion d'orthogonalité chez les géomètres grecs s'adresse à ce qui se tient debout, droit, normalement sur un plan. Pour ce faire, Vitruve disposait d'un instrument d'une autre facture appelé « norma ».

L'outil à tracer le cercle peut être autre que celui à reporter des distances, lequel a donné son nom —cum passus— à notre instrument classique.