Problèmes ouverts et narrations de recherche au lycée

Pascale Pombourcq et Michel Lacage

PLOT vous propose ici deux témoignages sur les narrations de recherche : celui de Pascale Pombourcq en 1ère S et celui de Michel Lacage en TS (compte rendu de l'atelier que ce dernier anima aux Journées Nationales de Caen en 2005).

Les pyramides de nombres de Pascale Pombourcq

J'ai été enseignante en collège pendant plusieurs années avant de revenir au lycée. Pendant ces années de collège, j'ai beaucoup pratiqué les narrations de recherche que j'avais découvertes dans un atelier des journées nationales d'Albi. J'ai continué à essayer de les pratiquer au lycée, mais il faut avouer que c'est plus difficile. Les élèves ont perdu de leur spontanéité (surtout les élèves de S !). Ils ont beaucoup de mal à raconter leur recherche et principalement à laisser les traces de raisonnements qui n'ont pas abouti ou qui sont faux. Voici un exemple d'une narration demandée en première S, l'an dernier. Je me suis inspirée d'un exercice tiré de la brochure olympiade n° 163.

Pascale Pombourcq est professeur au lycée Bourdelle de Montauban et l'actuelle présidente de l'APMEP.

On se propose de continuer à remplir le tableau ci-dessous avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

* Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.

* Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

1) Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.

2) Remplir les deux lignes suivantes.

3) Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004. Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

	3	4	5	

Voici quelques-unes des solutions proposées par les élèves. Je tiens à préciser que j'enseigne dans un lycée standard recevant tous les types d'élèves. Il s'agit du lycée technologique Bourdelle à Montauban. L'imagination des élèves est pourtant au rendez-vous !

			3	4	5			
		10	11	12	13	14		
	21	22	23	24	25	26	27	
36	37	38	39	40	41	42	43	44

Remarques faites sur la première case de chaque ligne :

$3 + 7 = 10$ $\quad$ $7 + 4 = 11$

$10 + 11 = 21$ $\quad$ $11 + 4 = 15$

$21 + 15 = 36$ $\quad$ $15 + 4 = 19$

La première case de la ligne suivante sera donc $36 + 19 = 55$

Remarques faites sur la première case de chaque ligne :

$3 = 1 \times 3$

$10 = 2 \times 5 = 2 \times (2 \times 2 + 1)$

$21 = 3 \times 7 = 3 \times (2 \times 3 + 1)$

La première case de la ligne suivante sera donc $4 \times (2 \times 4 + 1) = 36$

Remarques faites sur la dernière case d'une ligne et sur la première case de la ligne suivante :

$10 - 5 = 5$ = nombre de cases de la ligne où figure le 10

$21 – 14 = 7$ = nombre de cases de la ligne où figure le 21

La première case de la ligne suivante sera donc $27 + 9 = 36$

Remarques faites sur la colonne centrale :

4, 12, 24

$4 = 4 \times 1$

$12 = 4 \times 3 = 4 \times (1 + 2)$

$24 = 4 \times 6 = 4 \times (1 + 2 + 3)$

La case centrale suivante sera donc $4 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 40$
et donc la première $40 – 4 = 36$.

Les bonnes surprises sont toujours au rendez-vous des narrations de recherche ; je n'ai jamais été déçue. Ici, malheureusement, les élèves s'en sont tenus aux remarques, ils n'ont pas expliqué pourquoi ça « marchait ». Ils avaient répondu à la question et pour eux le contrat était rempli.

Les copies telles que celle que vous propose Michel Lacage pages 24/25 existent. On peut en rencontrer, même quand on n'a pas la chance d'enseigner dans un lycée prestigieux comme doit l'être le lycée franco-libanais de Beyrouth ! Les lectures de ces copies nous donnent envie de recommencer… incroyable !

L'expérience de Michel Lacage

1. Présentation de l'atelier

La pratique des narrations de recherche est aujourd'hui plus répandue dans les classes de collège, mais l'est-elle autant dans les classes de TS, lorsque la priorité est le programme à boucler ? Si les questions ouvertes ont fait leur apparition dans le programme officiel, n'est-ce pas en partie pour amener les élèves d'une classe à développer leur curiosité et à faire preuve d'initiative dans l'activité mathématique ? Solliciter de ses élèves de TS la narration de leur recherche permet à l'enseignant de mathématiques d'inciter le plus grand nombre à se lancer dans la résolution d'un problème ouvert.

Quelles sont les modalités de mise en oeuvre de narrations dans une classe d'examen ? S'il n'est évidemment pas possible que les élèves effectuent toutes les recherches en classe sous la conduite de l'enseignant, il est par contre souhaitable de consacrer quelques instants à une séance de questions-réponses, de manière à s'assurer d'une bonne compréhension de l'énoncé. A ce stade, aucune piste n'est ni évoquée, ni écartée par l'enseignant ; les élèves effectuent ensuite leur recherche à la maison. Les quatre problèmes qui suivent, proposés à deux classes de TS du Grand Lycée franco-libanais de Beyrouth entre janvier et avril 2005, répondent aux objectifs suivants :

* mettre tous les élèves en activité,
* leur donner envie de faire des mathématiques,
* les inciter à se jeter à l'eau et à produire un écrit,
* leur permettre de réinvestir plusieurs notions du programme de TS en dehors d'un contexte d'apprentissage direct.

Il est important de signaler qu'un problème ouvert peut aussi permettre d'appréhender une nouvelle notion ; par exemple, la découverte de la stratégie du jeu des tours de Hanoï avait permis d'introduire le raisonnement par récurrence dans ces mêmes classes, en début d'année. Chaque sujet donné aux élèves doit être précédé de consignes leur précisant clairement ce que le professeur attend d'eux. Le contrat est ainsi pleinement assumé par les élèves, qui évitent la confusion entre un devoir surveillé type bac et une narration de recherche.

Michel Lacage, après avoir enseigné au lycée franco- libanais de Beyrouth, enseigne maintenant au collège les Escholiers de la Mosson, à Montpellier. C'est un collège "ambition réussite", le seul collège de ce type dans l'Hérault.

2. Exemples de problèmes ouverts

2.1 Consignes

Je vous propose un problème où vous aurez tous beaucoup de choses à m'écrire. Pourquoi ? Et bien tout simplement parce que je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont abouti à rien. Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même. Racontez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les remarques, les aides, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou qui vous ont permis de trouver. Donnez des précisions sur la durée et l'organisation de votre travail.

2.2 Enoncés

1. Les tours de Hanoï
Règle du jeu :
On dispose d'un socle sur lequel sont plantés 3 piquets. Au début du jeu, on enfile n rondelles trouées sur un des piquets ; les rondelles ont des diamètres décroissants. On ne peut déplacer qu'une rondelle à la fois, pour la reposer sur l'un quelconque des 3 piquets. On peut poser une rondelle sur une plus grande, mais pas le contraire.
Le but du jeu est de déplacer les n rondelles sur un autre piquet.
Quel est le nombre minimum de déplacements ?

2. Polygones réguliers
On considère un polygone régulier à $2n$ sommets, $n > 1$
On choisit au hasard 3 sommets du polygone.
Quelle est la probabilité que ce triangle ait 3 angles aigus ?

3. Polyèdres
Dans un tétraèdre régulier, la somme du nombre de sommets et de faces diminuée du nombre d'arêtes est égale à 2.
Ce résultat est-il généralisable à d'autres polyèdres ?

4. Distance minimale
Soit C la courbe représentative de la fonction *ln* dans un repère orthonormal d'origine O.
Pour quel(s) point(s) M de la courbe C, la distance OM est-elle minimale ?

3. La narration de recherche de Lara Tabet sur le problème des tours de Hanoï

TABET LARA TS1 — Le 02/02/05

Evaluation formative : Narration de recherche

1. Les tours de Hanoï

Avec ~~2~~, ~~4~~, 5 et puis 6 livres, j'ai essayé de compter les mouvements nécessaires pour déplacer ces livres d'un piquet jusqu'à un autre en respectant les règles du jeu et ceci pour essayer de trouver une conjecture ou du moins une piste.

3 → 7 2^n+1 ?
4 → 15 vérifiée
5 → 31 non vérifiée.

Avec $n = 5$, il faut un nombre supérieur à $2^n + 1$ pour déplacer toutes les rondelles sur un autre piquet. Et déjà, je ne suis pas sûre de trouver le nombre de mouvements minimum même si j'ai essayé près de 5 fois et n'ai jamais obtenu moins de 31.

Pour 6 livres, ça va être encore plus difficile.

6 → 3.

Arrivé à un résultat duquel je ne pouvais rien tirer, j'ai décidé d'arrêter de répéter une dizaine de fois le jeu pour chaque valeur de n et d'essayer plutôt de réfléchir

Soit N le nombre minimum de déplacements.
Comme il fallait déplacer toutes les rondelles, $N > n$.
Comme toutes les rondelles devaient se déplacer deux fois au moins (à l'exception de la dernière), $N > n + 2(n-1)$

Oui

Mais je n'allais pas continuer ce raisonnement indéfiniment, je décidai de me consacrer plutôt sur la façon avec laquelle j'opérais.

Je réalisai qu'en fait j'étais obligé de déplacer n-1 rondelles sur un unique piquet pour pouvoir changer la dernière rondelle de piquet, le troisième piquet s'étant retrouvé libre.

Me vint immédiatement l'idée d'une suite définie par récurrence. Et il me semblait qu'il s'agissait d'une somme puisque le nombre de déplacements augmentait lorsque n augmentai

En fait, il ne me restait plus qu'à essayer d'exprimer en chiffres et en lettres ce que je devais faire à partir du moment que je déplaçait la dernière rondelle sur l'un ~~deux~~ autre piquet. Facile à dire mais difficile à faire !

Pour ce faire, je regardais pour commencer les chiffres obtenus dans le tableau du début. Il me semblait observer une certaine relation :

$U_{n+1} = 2U_n + 1$.

J'essayais donc de l'expliquer.

U_n → déplacement de n rondelles sur un autre piquet
1 → déplacement de la dernière rondelle sur le troisième piquet
U_n → déplacement des n rondelles sur le piquet où l'on vient de poser la dernière rondelle

Tout cela semblait assez logique :

T. bien

Soit (U_n) la suite telle que :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

LE TRAVAIL A DÛ ME PRENDRE 1 HEURE AU MAXIMUM MAIS C'ÉTAIT VRAIMENT UN TRAVAIL RAPIDE ET INTENSIF. J'AVAIS TOUT LE TEMPS CETTE PILE DE 6 LIVRES A MES COTÉS ET CETTE MÊME FEUILLE DEVANT MOI, ET BIEN ENTENDU MA REFLEXION. J'AI REALISE QUE L'IMPORTANT ETAIT DE ~~[illegible]~~ COMPRENDRE CE QUI NOUS ETAIT DEMANDE ET DE SUIVRE LES MANOEUVRES ENTREPRISES. IL S'AGISSAIT DE TROUVER LES 3 PRINCIPALES ETAPES DU JEU ET DE SAVOIR LES ETABLIR EN CHIFFRES ET LETTRES.
J'AI CHOISI CET EXERCICE PARCE QUE NOUS AVONS RESOLU LE SECOND PENDANT LA PREPARATION AU CONCOURS GENERAL. JE N'AI PAS UTILISE DE BROUILLON ET N'AI PAS DEMANDE D'AIDE

Petite bibliographie :

Bonafé F. – Chevalier A. – Combes M.C. – Deville A. – Dray L. – Robert J.P. – Sauter M. ; 2002 ; *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Co-édition IREM de Montpellier et APMEP.

IREM de Paris 7 ; 2002 ; *Expériences de narration de recherche en mathématiques*. Editions ACL.

TABET LARA - TS1 Le 02/02/05

Raya m'a à un moment appelé pour me demander si l'explicat théorique suffisait pour donner l'expression de la suite trouvée. Je lui ai répondu que je croyais que oui et que je ne croyais pas d'explication mathématique possible.

Elle me demanda ensuite si une expression de la suite par récurrence répondait véritablement à la question. Je lui ai donc rappelé le point méthode distribué au cours du premier trimestre et si on crée une suite géométrique (V_n) telle que

$$V_n = U_n - \frac{1}{1-2} = U_n + 1$$

$V_0 = 1$
$V_1 = 2$
$V_2 = 4$
$V_3 = 8$

(V_n) est donc une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

$V_n = 2^n$

Par suite, (U_n) peut être défini par $U_n = 2^n - 1$.

Avec un quadrillage et une équerre

Henry Plane

Résolution de l'équation $x^2 + px + q$ à l'aide d'un quadrillage et d'une équerre.
Précisons : une équerre à angle droit, comme le quadrillage.

Sur un quadrillage de centre O, situons les points A, B, P et Q tels que
$\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 1$, OA orthogonal à OB,

$\overline{AP} = p\,\overline{OB}$, $\overline{QP} = -q\,\overline{OA}$.

Cherchons alors à placer l'équerre avec son sommet de l'angle droit sur (AP), un côté passant par O et l'autre par Q.
Si cela est possible, ce sommet M est tel que $\overline{MA}$ est racine de l'équation.

En effet, calculons OQ^2 de deux manières.

$$OQ^2 = (\overline{OA} - \overline{PQ})^2 + AP^2 = (1-q)^2 + p^2$$

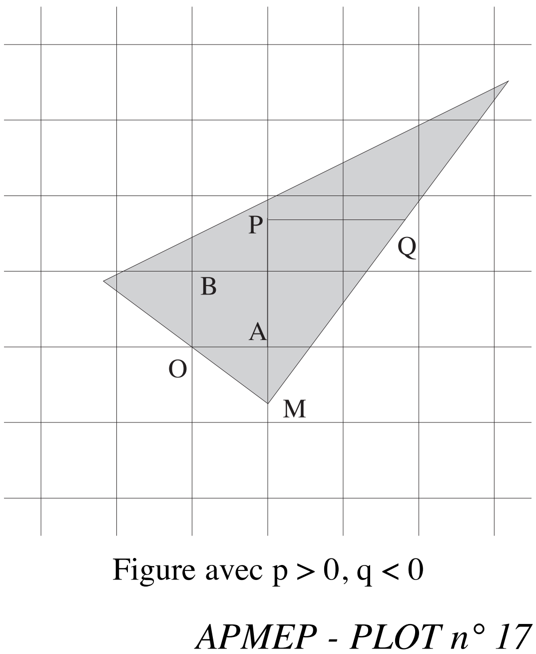

Figure avec $p > 0$, $q < 0$