Une introduction géométrique du nombre i

Xavier Gauchard

Voici le compte rendu d'un atelier qui a eu lieu aux Journées Nationales de l'APMEP à Caen en octobre 2005. Xavier Gauchard, animateur de cet atelier, est professeur de mathématiques au lycée Augustin Fresnel de Caen. Il est aussi animateur à l'IREM de Basse-Normandie, formateur à l'IUFM de Basse-Normandie et membre du bureau de la CORFEM (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques).

Introduction

Les contenus du programme de la partie obligatoire de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique sont déclinés en trois parties : Analyse, Géométrie, Probabilités et statistique[1]. Après un chapeau précisant que « *Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes*. », les contenus de « *Géométrie plane : nombres complexes* » sont accompagnés de modalités de mise en œuvre « *Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques* » et de commentaires « *La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe*. »

Lors de l'année de réflexion sur la mise en place de ces programmes, une introduction géométrique des nombres complexes a souvent été évoquée, mais elle aboutissait généralement à définir arbitrairement le nombre i. Beaucoup de collègues, soucieux de donner du sens à ce nombre imaginaire, ont alors pris le parti de continuer une approche historique des nombres complexes, avec l'introduction de la quantité $\sqrt{-1}$ lors de la résolution des équations de degré 3 par les algébristes italiens du 16ème siècle, tels Cardan et Bombelli.

Dans le groupe lycée de l'IREM de Basse-Normandie, notre travail de recherche s'est porté sur l'introduction géométrique du nombre i. Après diverses tentatives, nos travaux ont trouvé un second souffle avec la lecture du livre d'Argand « *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* »[2] et du chapitre « Une approche géométrique : une construction qui légitime. » du livre « *Images, Imaginaires, Imaginations*. », réalisé par la commission inter-IREM. L'académie de Versailles a aussi travaillé à partir de ces documents[3].

[1] Bulletin Officiel Hors Série n°4 du 30 août 2001

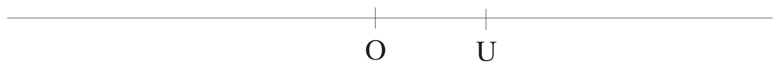
[2] On peut visualiser ou télécharger en fichier PDF l'intégralité du livre sur Gallica http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-110283

[3] http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/complexes/nbi.html

Sur « la droite des réels » (OU), placer à l'aide du compas les points A et B d'abscisses a et b, puis donner un procédé de construction pour obtenir les points suivants :

le point S tel que OS = $a + b$ | le point P tel que OP = $a \times b$

le point Q tel que OQ = $\frac{a}{b}$ | le point M tel que $OM^2 = a \times b$



L'exposé de nos travaux à des enseignants de l'académie, puis lors des journées nationales de l'APMEP à Caen en octobre 2005, a toujours rencontré un vif intérêt. Il semble que cela soit simple et plus en lien avec une génération d'élèves ayant beaucoup moins d'aisance dans le calcul algébrique et en revanche plus de compétences en géométrie (ce qui semble normal compte tenu de l'évolution des programmes).

Nombres, opérations et points

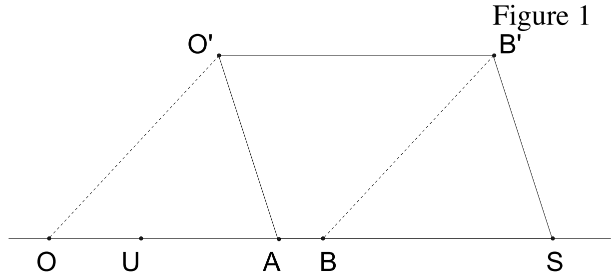
En classe de seconde, on admet que « *l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite* »[4]. A partir de deux nombres réels a et b, on peut placer les points A et B, d'abscisses a et b, puis si cela est possible les points S, P, Q et M, correspondant à leur somme, leur produit, leur quotient et leur moyenne géométrique.

Au fur et à mesure des ateliers sur ce sujet, diverses méthodes sont proposées. Celles-ci sont reprises sur GéoplanW, avec l'utilisation de l'option Commande de dessins par étapes, qui permet de donner une vision progressive et dynamique à la construction.

Le fichier **atelier1.g2w** est le fichier de base. A et B sont des points que l'on peut piloter au clavier avec les commandes a et b. Leurs abscisses sont affichées.

Le fichier **somme.g2w** (Figure 1) permet avec la touche w de faire apparaître un point O' quelconque, le point B' tel que $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB}$, puis le point S tel que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{O'B'}$. Son abscisse est alors affichée. L'apparition du segment [O'B'] en rouge permet de visualiser la translation. On construit S à partir de A pour en faire ressortir la transformation géométrique qui transforme A en S. En pilotant les points A et B au clavier, on peut voir que la construction « résiste » aux nombres négatifs.

Figure 1



[4] Commentaire des programmes de la classe de seconde (Bulletin Officiel)

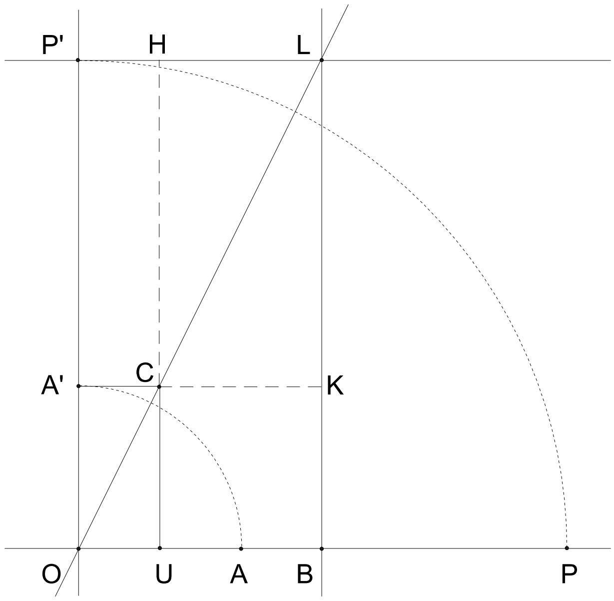
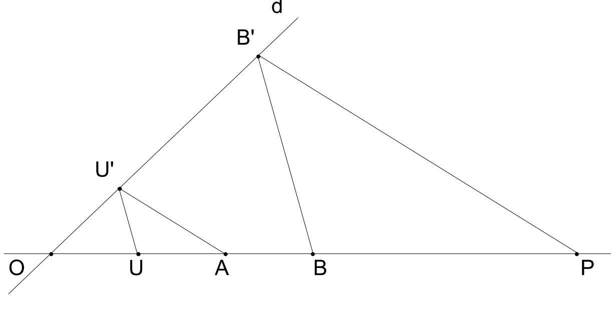


Figure 2

Le fichier **prod1.g2w** (Figure 2) permet avec la touche w de visualiser une construction qui se justifie avec les aires. On trace la droite d perpendiculaire en O à la droite des réels (OU) sur laquelle on reporte au compas le point A'. On construit le rectangle OUCA', puis on trace la droite (OC). Celle-ci coupe la perpendiculaire en B à (OU) en un point L. La parallèle à (OU) passant par L coupe la droite d en P'. On reporte P' sur la droite des réels pour obtenir le point P d'abscisse $p = a \times b$.

Figure 3



Quand a et b sont positifs, cette construction se justifie en montrant que les rectangles OBKA' et OUHP' ont la même aire. Ces deux trectangles ayant en partie commune le rectangle OUCA', il suffit de montrer que les rectangles UBKC et A'CHP' ont la même aire. Avec la touche x, on voit apparaître ces rectangles, ainsi que les points H et K. Le rectangle OBLP' est formé de deux triangles OBL et OLP' de même aire. Si l'on retire à ces triangles les triangles de même aire OUC et OCA' d'une part, puis les triangles de même aire CKL et CLH d'autre part, il reste les rectangles UBKC et A'CHP'. En utilisant le pilotage de a et de b au clavier, la construction résiste aux nombres négatifs. Cette construction est visuelle et justifiable pour les cas positifs en classe de seconde, mais n'est qu'un cas particulier de la suivante plus en lien avec le programme de première S.

Lors de l'atelier, aété proposée une construction du produit à partir de triangles semblables dans un cercle.

Le fichier **prod2.g2w** (Figure 3) permet de visualiser avec la touche w la construction dite de la « droite perdue », cette droite que l'on peut piloter au clavier avec la touche m. Sur cette droite d, on place un point U', puis le point B', intersection de d avec la parallèle à (UU') passant par B. P est alors le point d'intersection de la droite des réels avec la parallèle à (U'A) passant par B'. Les élèves retrouvent tout de suite le théorème de Thalès ou, plus rarement, que P est l'image de A par l'homothétie de centre O qui transforme O en A. La construction résiste au passage aux nombres négatifs.

Etablir une condition sur les points

Pour le produit $a \times b$, avec a et b positifs, le point P est tel que $\frac{OP}{OA} = \frac{OB}{OU}$.

Si l'on formule cette relation avec les nombres : $\frac{p}{a} = \frac{b}{1}$, on retrouve la comptine

de la proportionnalité : « p est à a ce que b est à 1 ».
Cette comptine que l'on peut reprendre dans le cas du quotient $\frac{q}{a} = \frac{1}{b}$: « q est à a ce que 1 est à b »,
et dans le cas de la moyenne géométrique $\frac{m}{a} = \frac{b}{m}$: « m est à a, ce que b est à m ».

Cette idée permet de construire Q avec une procédure semblable à celle de la construction de P, ce que l'on peut visualiser avec les fichiers **quot1.g2w** et **quot2.g2w**. Q est ainsi l'image de A par l'homothétie de centre O qui transforme B en U (Figure 4).

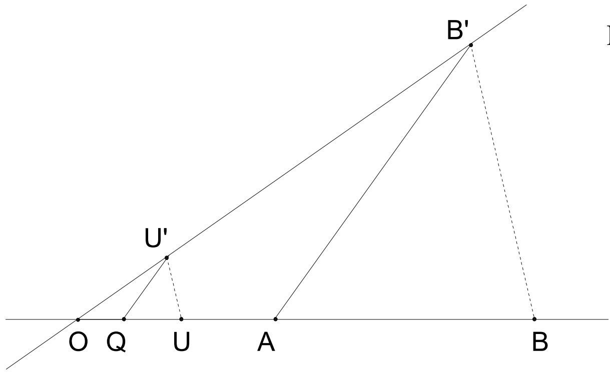


Figure 4

Les constructions de P et de Q résistent lorsque l'on prend des valeurs négatives pour a et/ou pour b. Il y a alors une condition sur les distances et une condition sur le sens des vecteurs qui est donnée par la relation vectorielle de l'homothétie et que l'on peut exprimer sous la forme :
« $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont de même sens lorsque $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OB}$ le sont aussi, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont de sens contraires lorsque $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OB}$ le sont aussi ».

En première, le repérage polaire permet de caractériser un point distinct de l'origine par la donnée d'une distance et d'un angle, dans le repère $(O;\overrightarrow{OU})$. En reprenant cette idée pour les points de la droite réelle, on peut mettre en parallèle la relation sur les nombres et deux relations sur les points associés :

$$\frac{p}{a} = \frac{b}{1} \quad et \quad \begin{cases} \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{OB}{OU} \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right) = \left(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OB}\right) (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

Puis de donner la définition suivante pour quatre points A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d toutes différentes de 0.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad quivaut \quad \begin{cases} \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD} \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right) (\text{mod } 2\pi) \end{cases}}$$

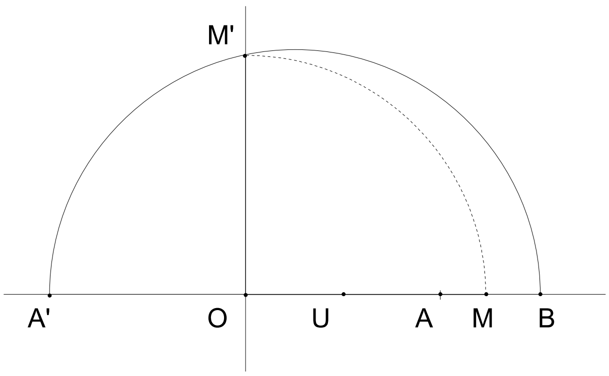
Ainsi la procédure de construction des points peut se faire en deux étapes : la longueur et le sens.
On vérifie que cette définition permet de construire P, puis Q :

$$\frac{q}{1} = \frac{a}{b} \quad et \quad \begin{cases} \dfrac{OQ}{OU} = \dfrac{OA}{OB} \\ \left(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OQ}\right) = \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

On construit les points P et Q à partir du point A.

Construire M lorsque *a* = 1 et *b* = - 1 ?

Le fichier **racine.g2w** permet de visualiser la construction classique de la moyenne géométrique. Celle-ci résiste au cas où *a* et *b* sont négatifs, mais pas aux cas où les deux nombres sont de signes contraires…



Argand, dans son livre, fait « deux remarques sur les quantités négatives ». « *La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la grandeur, la quantité négative est réelle ou imaginaire; la seconde est que, deux quantités d'une espèce de fournir des quantités négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend 1° l'idée de leur rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument ; 2° L'idée du rapport des directions ou sens auxquelles elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition* ».

Sans entrer dans les détails de ce qu'Argand explique, l'idée de travailler sur les rapports des grandeurs considérées absolument, puis sur leurs directions ou sens incite à voir jusqu'où résiste notre construction.

Peut-on construire M lorsque *a* = 1 et *b* = -1 ? En appelant U' le point d'abscisse –1, peut-on construire M ?

$$\frac{m}{1} = \frac{-1}{m} \quad \textit{quivaut} \quad \begin{cases} \dfrac{OM}{OU} = \dfrac{OU'}{OM} \\ \left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OU'}\right) (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

$$\left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OU'}\right) - \left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}\right) \ (\textit{mod } 2\pi)$$

$$2\left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}\right) = \pi \quad (\textit{mod } 2\pi)$$

Tout d'abord OM = 1, puis

Ce qui nous donne deux solutions possibles et surtout à imaginer que des nombres puissent être représentés par des points qui ne sont pas sur la droite réelle ! Mais la droite est saturée puisqu'on l'a « infiniment subdivisée », puis on a rempli les intervalles entre toutes ces subdivisions.

Suite de l'atelier

Cette première partie de l'atelier n'a pas eu pour but de donner un déroulement pour la classe, mais de présenter de manière détaillée les éléments permettant de se construire une séance sur l'introduction géométrique du nombre i.

La lecture de l'article d'Argand permet aussi de réaliser des travaux en classe où *« les élèves doivent prendre conscience du fait que les mathématiques sont une discipline vivante, fruit du labeur et du génie de nombreux individus »* [5]. Il est possible de lire avec les élèves la difficulté de rédaction pour Argand sans les outils d'aujourd'hui, en particulier page 10, pour exprimer une « *nouvelle espèce de grandeurs* », qu'il appelle « *lignes en direction ou, plus simplement, lignes dirigées* » et qui « *doivent être le sujet des recherches qui vont suivre* ». Il est intéressant aussi de voir son argumentation pour remettre en cause les dénominations « *réelles* » et « *imaginaires* » et proposer celles « *d'ordre prime* » et « *d'ordre médiane* » et de regarder ce qu'il en est deux siècles plus tard. On peut lire ensuite que, gêné par la notation a$\sqrt{-1}$, Argand propose d'étendre l'utilisation des symboles + et – pour l'axe horizontal à l'utilisation des symboles et pour l'axe vertical...

L'introduction géométrique du nombre i a été expérimentée par Muriel Alliot, présidente de la Régionale APMEP de Basse-Normandie, et animatrice IREM dans le groupe lycées. Elle est venue échanger sur ce travail qu'elle a entrepris en précisant qu'il lui semble difficile de le faire en classe si on ne s'est pas attelé à faire à la main toutes les constructions. Son récit de classe, ainsi que différents fichiers Geoplan sont téléchargeables à l'adresse : http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article865

Conclusion

Le nœud de cette approche géométrique du nombre i est sans aucun doute le lien entre l'égalité des rapports des nombres et les relations géométriques entre les points

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \textit{ quivaut } \begin{cases} \dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OD} \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right)(\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

associés :

Après avoir appelé *i le* nombre pour lequel il faut changer de cadre et sortir de la droite, on cherche x tel que $\frac{x}{1}=\frac{i}{x}$, on étend le procédé de construction de la somme, puis celui du produit et du quotient…Cela prend du temps, certes, mais dans son bilan, Muriel Alliot faisait remarquer que les élèves associaient plus aisément somme, forme cartésienne et translation d'une part, produit, forme trigonométrique et rotation d'autre part, ce qui était un sacré gain de temps par la suite.

L'investissement des élèves est sans doute favorisé par le plaisir et la motivation de l'enseignant à expérimenter une nouvelle approche. Celui-ci existe aussi par leur intérêt pour ce qui se construit et ce qui se voit, cet aspect géométrique qui légitime les nombres complexes et qui, avant Argand, pouvait paraître comme un subtil jeu de l'esprit…

Les fichiers Géoplan correspondant à cet article sont disponibles sur le site de l'APMEP, rubrique « PLOT ».

[5] B.O. Hors Série n°7, programme de première S, 31 août 2000