Le « Débat scientifique » en classe

Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématiques ?

Liouba Leroux (Antoine.leroux@ac-grenoble.fr) et Thomas Lecorre, (Thomas.lecorre@wanadoo.fr) sont tous deux membres du groupe « Recherches sur le débat scientifique » de l'IREM de Grenoble. *Ils ont présenté deux ateliers aux journées de Clermont-Ferrand ayant pour titre « Le Débat Scientifique en Classe ou comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématiques ? » dont voici le compte rendu.*

Pourquoi « dévoluer » une responsabilité scientifique à l'élève ?

Nous partons du constat suivant : **l'élève n'a pas de responsabilité scientifique en classe.** Dans les classes, chacun a l'expérience des élèves qui se contentent de répondre aux questions sans vérifier la validité de leurs réponses, chacun a l'expérience d'une sorte d'attentisme de la part de nombreux élèves, chacun regrette cette attitude très scolaire qui fait que le professeur assure essentiellement, à lui seul, toutes les vérifications sur la pertinence, la validité des propositions alors que souvent ce travail pourrait être fait par les élèves eux-mêmes.

Récemment, un professeur excédé de ce comportement avait projeté — mais, semble-t-il, il n'est pas passé aux actes — d'arriver un jour en cours en prétendant que le programme de maths venait de changer et que désormais $(a + b)^2$ ne ferait plus $a^2 + 2ab + b^2$, mais $a^2 + 3ab + b^2$...
Pour forcer une réaction ? Si ce professeur avait fait cela très normalement (en pince sans rire), il y a fort à parier qu'il n'aurait pas provoqué un tollé de protestations !
Un exemple tiré de notre expérience illustre assez bien jusqu'où peut aller cette attitude scolaire : le statut de la vérité d'élèves de seconde.

Lors d'une discussion en classe au sujet d'une conjecture, les élèves étaient appelés à dire si, selon eux, cette propriété était vraie ou fausse. Une élève de seconde explique alors qu'une telle propriété, si elle avait été inscrite dans le cours, elle l'aurait acceptée, elle l'aurait trouvée correcte mais, qu'ainsi mise au débat, la propriété pouvait être fausse et devenait douteuse. Nous pensons que cette élève révèle ainsi sa vision du statut de la vérité mathématique : la vérité d'une phrase mathématique dépend moins de ce qu'elle énonce que de celui qui l'énonce et de comment elle est proposée. D'ailleurs, dans ce débat, un autre élève prend la parole pour enfoncer le clou : il dit qu'il aurait admis comme correcte cette propriété au sein d'une démonstration mais que, présentée comme une conjecture, il la pensait fausse. A nos yeux, cela indique que la vérité mathématique pour ces élèves est essentiellement l'affaire du professeur et que, d'une certaine manière, ils ont renoncé à évaluer cette vérité autrement que par décodage de l'intention pédagogique de ce professeur.

Nous pensons que cette sorte d'irresponsabilité scientifique de l'élève est répandue et nous posons la question : **quel sens peut avoir un énoncé mathématique si on se prive de le penser soi-même ?**

Pour sortir l'élève (et le professeur !) de cette impasse, nous proposons de lui dévoluer une responsabilité scientifique.
Dévoluer une responsabilité scientifique à l'élève, c'est mettre l'élève en situation de se fonder une opinion personnelle : je pense que c'est vrai (ou faux), je pense que c'est pertinent ou non, je pense que c'est valide ou non, je suis convaincu ou pas...

La question naturelle est alors : **Comment mettre l'élève dans cette posture ?**

Le « débat scientifique » est une tentative pour mettre l'élève dans cette nouvelle posture en classe ; regardons comment cela fonctionne dans un exemple en classe de seconde.

Le « Débat Scientifique » en classe, une pratique cadrée.

Prenons, pour illustrer cela, un exemple vécu en seconde.
Tout d'abord, on part toujours d'un objectif épistémologique. Dans l'exemple que nous vous proposons, il s'agissait de *faire apparaître à l'élève la nécessité de définir le Vrai et le Faux du mathématicien* dans une classe de seconde.
Pour faire apparaître cette nécessité, on propose à la classe l'étude d'une conjecture : « Si un quadrilatère a deux côtés de même longueur et deux côtés parallèles alors c'est un parallélogramme ».
Cette conjecture est fabriquée pour attirer l'élève à l'obstacle épistémologique suivant : en l'absence de convention collective pour distinguer le vrai du faux (en mathématiques), les élèves vont avoir le choix d'utiliser la logique de la nécessité (celle du mathématicien) ou celle de l'utilité (essentiellement celle du quotidien), ces deux logiques mènent à des conclusions différentes sur cette conjecture.

Un temps de réflexion est donné aux élèves ; nous l'appelons « le débat privé » car les élèves peuvent partager leurs réflexions avec leurs plus proches voisins. Le professeur garde une stricte neutralité et refuse de répondre aux questions éventuelles.

Quand les élèves ont fondé leur opinion, leur conviction, on propose un vote parmi trois positions : « Vrai », « Faux » et « Autre ». Ce vote n'a pas pour vocation d'établir démocratiquement la vérité (!!), mais il permet de prendre une photographie des différentes opinions dans la classe et prépare « la confrontation » des arguments.
Ici, la moitié de la classe pensait la conjecture Vraie, un tiers des élèves la pensait Fausse et le reste avait voté Autre. Cette dernière catégorie regroupe les élèves qui ont des arguments qui leur semblent paradoxaux, ceux qui n'ont pas compris l'énoncé, ceux qui sont encore trop « timides » pour s'engager et entrer dans la dichotomie du mathématicien et enfin, ceux qui pensent qu'une affirmation peut être vraie et fausse à la fois.

Ensuite vient le temps du débat au sein de la classe, celui nous appelons « débat public » (par opposition au débat privé). Le professeur organise le tour de parole, inscrit au tableau les arguments ; il problématise les oppositions dans la classe,

donne du crédit à tous les arguments et respecte une neutralité stricte pendant tout le débat. Dans cet exemple, le vrai a été défendu avec plusieurs exemples que les élèves sont venus dessiner au tableau (un parallélogramme, un rectangle et un carré), prouvant aux yeux de leurs partisans la véracité de la proposition ; le faux a été défendu avec des contre-exemples dessinés eux aussi au tableau (un trapèze isocèle notamment), le mot « contre-exemple » n'est pas apparu, mais certains élèves ont expliqué qu'une seule situation fausse suffisait à dire fausse la conjecture. À la fin du débat, les élèves avaient réussi à exprimer leur opposition et les raisons de cette opposition, qui restait non réductible par eux seuls.
Le professeur propose un vote ultime pour connaître l'état de la classe à la fin du débat. Dans notre situation, certains élèves ont changé d'avis : un tiers de Vrai, deux tiers de Faux. On remarquera que le débat a permis à tous les élèves de se positionner, la position « Autre » a disparu.
On pourrait penser *a priori* que cette issue, où un tiers de la classe pense encore vraie cette conjecture, est une catastrophe mais c'est, dans notre problématique, une aubaine (préméditée en réalité) : ceux qui votent ainsi ignorent manifestement la convention mathématique que l'on souhaite établir, et peu de ceux qui pensent fausse la conjecture ont conscience de fonder leur conviction sur une seule convention, c'est d'ailleurs cette ignorance qui les empêche de convaincre les autres.

Vient alors le temps de « l'institutionnalisation » qui incombe au seul professeur car c'est le temps du cours, de ce qu'il faut tirer comme leçon de ces débats, en mettant en avant les arguments pertinents mais aussi les arguments séduisants et qui s'avèrent finalement incorrects. Dans notre cas, le professeur a pu facilement expliquer que, sans règle du vrai et du faux, on ne peut pas arriver à se mettre d'accord. Il faut donc une convention !

Ce que la pratique nous a appris.

La pratique du « débat scientifique » est émaillée de doutes et de difficultés, mais de nombreuses années nous ont permis d'observer quelques points remarquables et constants.

Le premier d'entre eux est que, tout au long de l'année, les énoncés prennent du sens pour les élèves. Là où les élèves ne cherchaient qu'une réponse mécanique à un stimulus scolaire, ils deviennent davantage critiques d'eux-mêmes et insatisfaits lorsque le sens leur échappe.

Le second est que la preuve de la fausseté est facilement dévoluable. En quelques cours, le principe est acquis, en quelques semaines l'imagination est libérée pour aller chercher les contre-exemples là où ils se cachent. Certains élèves se révèlent à cette occasion car, pour la première fois, ils se sentent capables d'être sûrs d'eux et d'avoir raison contre tous... à condition d'avoir trouvé un contre-exemple.

Dans les débats, le besoin de démontrer émerge. Si la démonstration des conjectures vraies reste difficile, le débat a en tout cas le rôle de mettre les élèves en position de demande et d'attente de la démonstration.

Mais, pour tout cela, un partage rigoureux des responsabilités dans la classe s'impose. Le professeur doit rester neutre chaque fois que ses élèves ont la capacité de prendre l'initiative. L'expérience montre qu'ils en sont bien plus capables que nous sommes tentés de le croire lorsque nous les regardons à travers le prisme déformant d'un rythme effréné. Parallèlement, le professeur ne pourra jamais se séparer de deux rôles essentiels, l'animation des débats et leur institutionnalisation. Pour le reste, lorsqu'un élément du débat, contre-exemple ou démonstration est hors de portée de la classe, il la lui fournira en essayant par une attitude très explicite de ne pas déposséder les élèves de toute responsabilité scientifique. Deux cas sont à distinguer : soit il apporte un argument ou un candidat contre-exemple en précisant : « je vous le propose car je trouve qu'il a son intérêt, mais je ne vous donne pas mon avis sur sa vérité et/ou sa pertinence pour vous obliger à y réfléchir vous-mêmes et, dans cinq minutes, je vous demanderai votre avis ! », soit au contraire il expliquera bien en quoi cette idée neuve, ce nouveau raisonnement qu'il leur était difficile d'imaginer seuls correspond néanmoins aux interrogations et/ou aux tentatives de solutions du groupe classe. C'est l'introduction d'un discours méta-mathématique explicite qui permet de ne pas confisquer brutalement la responsabilité si durement déléguée.

Enfin, et c'est peut-être le plus important, cette pratique est compatible avec le temps qui nous est imparti mais, il ne faut pas se le cacher, cela demande un changement radical, et davantage encore pour le professeur que pour les élèves, qui s'adaptent rapidement.

Des moments incontournables.

Pour faire vivre au mieux le « débat scientifique » en classe durant toute l'année scolaire, nous avons identifié quelques points clés par lesquels il nous semble nécessaire de passer (lorsqu'on a voulu en faire l'économie, la réalité de la classe nous a rappelé assez régulièrement qu'il est finalement difficile de s'en priver). Ces points clés sont :

- **Le changement de contrat didactique** entre le professeur et la classe : il faudra identifier l'ancien contrat, le déstabiliser quelque peu pour pouvoir en installer un nouveau.
- **La dévolution du Faux (et du Vrai)** : il s'agira d'une activité dont le seul but sera de faire comprendre aux élèves comment ils peuvent eux-mêmes décider de ce qui est faux (et par extension de ce qui est vrai).
- **Des activités de mise en confiance**, car une fois la dévolution d'une certaine responsabilité scientifique initiée, il faut un temps où les élèves pourront exercer leur décision de façon assez aisée.
- **Une alternance** de ce que nous avons désigné comme des **activités « extra-ordinaires »** qui introduisent des concepts ou des pratiques entièrement nouveaux et **des activités « ordinaires »** qui sont simplement l'expression (dans la classe tout au long de l'année) de la mise en place de ce nouveau contrat.

Ce sont ces quatre phases du débat au cours de l'année que nous allons préciser maintenant.

Le changement de contrat didactique.

Le contrat didactique est le contrat, souvent implicite, qui dicte les rôles, les droits et devoirs des acteurs de la classe, professeur et élèves, sur le plan didactique. Ainsi, quand on a demandé à des élèves de primaire de donner l'âge du capitaine d'un bateau contenant 26 chèvres et

14 moutons et que ces élèves répondent massivement 40 ans, ceci s'explique par la notion de contrat didactique : les professeurs posent toujours des bonnes questions, c'est-à-dire des questions auxquelles les élèves peuvent répondre, et les élèves, eux, répondent avec les connaissances et outils dont ils disposent. Dans ce contrat, l'élève n'a pas la charge de vérifier la pertinence de sa réponse, son rôle est simplement de produire une réponse conforme aux habitudes de la classe, aux notions étudiées. Si, d'aventure, on lui demande ce qu'il pense de cet énoncé, ce faisant on effectue un changement de contrat, il répond assez naturellement qu'il ne voit pas le rapport entre les chèvres, les moutons et l'âge du capitaine.

Il s'agit donc de passer d'un contrat didactique plutôt scolaire à un contrat didactique de nature plus épistémologique.

Effectuer un changement de contrat est donc devenu, à nos yeux, l'un des moyens fondamentaux de dévoluer une responsabilité scientifique à l'élève et de pouvoir pratiquer le « débat scientifique » sans que celui-ci ne devienne un jeu truqué dans lequel, en apparence, le professeur donne la main à l'élève alors qu'en réalité il continue de tirer toutes les ficelles et de ne laisser aux élèves qu'un rôle très secondaire sur le plan épistémologique.

Si le contrat didactique évolue tout au long de l'année en fonction de l'histoire de la classe avec le professeur, en fonction des activités proposées et des rôles attribués, c'est en début d'année qu'il faut initier un changement de contrat qui permette à l'élève d'identifier que le jeu que l'on va jouer est d'une tout autre nature que le jeu habituel. Pour cela, nous donnons assez rapidement à la classe des occasions de cette prise de conscience, essentiellement de deux manières : d'une part en lui faisant vire des situations « inhabituelles » et, d'autre part, en adoptant, nous-mêmes, une attitude « nouvelle ».

Les situations

De nombreuses situations conviennent pour initier une transformation du rôle de l'élève en classe. Nous en avons choisi quelques-unes.

Aire et périmètre d'un rectangle

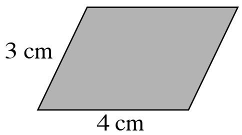
Nous proposons à la classe d'étudier la conjecture suivante et la mettons en débat : *« L'aire et le périmètre d'un rectangle varient dans le même sens ».*

Si cette conjecture sert évidemment à révéler à l'élève le découplage aire-périmètre, et cela provoque souvent des débats très animés ; son intérêt, dans notre problématique, réside ici ailleurs : la rédaction de la conjecture est volontairement vague et pose de vrais problèmes d'interprétation à la classe. En faisant vivre aux élèves la discorde qui va avoir lieu à cause des compréhensions multiples de l'énoncé, on met l'élève en situation d'interroger lui-même le sens des mots utilisés. Soit les élèves proposeront eux-mêmes une reformulation, soit c'est le professeur qui la proposera finalement ; dans les deux cas, ce dernier fera remarquer que le seul moyen de se mettre d'accord est de s'entendre préalablement sur la signification des énoncés. De fait, une fois transformée en « plus le périmètre d'un rectangle est grand, plus son aire est grande », la conjecture pose beaucoup moins de problèmes.

Nous proposons cette situation afin d'initier un changement de positionnement de l'élève : une question n'a de sens que dans le cadre d'une signification qu'on lui donne. Ainsi, il va falloir souvent discuter du sens que chacun peut donner pour se comprendre mutuellement et avancer sur le chemin de la recherche d'une vérité collective...

Aire d'un parallélogramme

« Quelle est l'aire de ce parallélogramme ? »



Une telle question a été posée à des étudiants à l'entrée de l'université en filière de mathématiques et la réponse la plus fréquente est 12 cm^2 ! (Encore un effet de contrat). Mais la question posée aux mêmes étudiants en ajoutant un angle α (entre les côtés marqués 3 cm et 4 cm) obtient la bonne réponse : 12 sinus α !

Dans le secondaire, la réponse des élèves est évidemment aussi 12 cm^2.

Nous pouvons expliquer ces réponses assez simplement : l'élève a une habitude importante du jeu scolaire où les questions désignent systématiquement tout ce qui est nécessaire pour répondre. Cela provoque ce genre de catastrophe : car lorsqu'on aplatit le parallélogramme, les longueurs des côtés ne changent pas, mais son aire disparaît progressivement[1].

On utilise donc cette situation pour montrer les limites du contrat habituel qui, d'une certaine manière, piège l'élève luimême.

Sudokus impossibles...

Quelques sudokus simplifiés (avec seulement 4 chiffres) ont été donnés au cours de la première semaine de la rentrée des grandes vacances en classe de seconde avec le prétexte de revenir tranquillement à une activité intellectuelle et mathématique. Parmi eux, ont été glissés des sudokus impossibles et d'autres admettant plusieurs réponses possibles.

Il s'agit là de donner un signal fort dès le début de l'année pour ouvrir radicalement l'univers des possibles (et des impossibles) et introduire à la nécessité mathématique.

Pour ce qui concerne les sudokus à plusieurs réponses possibles, ces différentes réponses écrites au tableau par les élèves créent dans la classe une sorte d'incrédulité momentanée : comment peut-il y avoir plusieurs réponses à un même exercice ? L'habitude de l'école, c'est plutôt une seule bonne réponse, cela étant aggravé par le fait que les sudokus du commerce n'ont qu'une seule réponse...

L'objectif est, ici, de montrer qu'une seule bonne réponse n'est ni une nécessité de l'école, ni même celle des sudokus en général et que, par contre, c'en est une pour ceux du commerce.

De même, dans le cas des sudokus surdéterminés et n'admettant aucune solution, les élèves interprètent les contradictions sur lesquelles ils tombent, comme une incapacité personnelle à résoudre le problème, car les sudokus du commerce ont toujours une solution. Vient alors une discussion sur la différence entre le « je n'y arrive pas » et le « ce n'est pas possible », ce dernier représentant une nécessité au sens de la logique mathématique.

Et oui, il existe des problèmes impossibles à résoudre ! Cette situation est fabriquée pour ouvrir à l'élève des possibilités qu'il s'était peu à peu interdites : ma solution est peut-être aussi correcte, je pense que cet exercice est impossible... Tout cela va contribuer grandement à la richesse des débats ultérieurs.

1			
	4		
4			
	3		**2**

[1] Les élèves s'approprient assez rapidement ce type de création de contre-exemple par déformation dynamique de la figure respectant les données jusqu'à un état où le doute n'est plus permis.

Bien évidemment ces situations, et d'autres, ne changent pas radicalement et instantanément la position de l'élève dans la classe, mais ce sont des signes importants qui amorcent une adaptation nécessaire à une nouvelle façon de travailler, nécessité qui repose davantage sur l'épistémologie que sur des raisons scolaires (évaluation, désir de faire plaisir au professeur,...)

Des attitudes

Ce qui permettra au changement de contrat de vivre dans la durée, ce sont davantage des attitudes qu'aura le professeur tout au long de ses cours.

La première posture, la plus visible, est de « faire vivre le faux » en classe. Il s'agit de laisser aux élèves la possibilité de douter lorsqu'une question est posée. Si, par exemple, le professeur reprend toujours à l'oral les propositions fausses et écrit au tableau les idées vraies, les élèves pourront s'appuyer sur cette constance pour éviter tout effort de réflexion. De façon à ce qu'ils soient obligés de prendre parti, de prendre en charge une responsabilité scientifique, nous devons donc nous astreindre à gommer nos mimiques, nos attitudes qui orientent si souvent nos élèves. Les propositions fausses pourront ainsi être réellement vécues et aboutir à la constatation que l'erreur est source de progrès à partir du moment où on reconnaît qu'elle est séduisante et donc que, plus tard, seul devant sa copie, on sera probablement amené à la refaire si les arguments qui montrent sa fausseté ne sont pas assez présents dans les esprits.

Parallèlement, ce changement de contrat s'accompagnera de discussions régulières sur la pertinence des points de vue et leur valeur épistémologique. En effet, quand certains arguments sont formellement faux, ils contiennent pourtant parfois des idées très intéressantes, voire géniales ; il faut alors le souligner pour en faire profiter le reste de la classe. *A contrario*, certains arguments sont formellement corrects mais « creux » épistémologiquement, il s'agit alors aussi de le faire remarquer, avec le respect qu'il convient, pour que, peu à peu, la classe devienne elle-même plus attentive à la valeur des arguments.

Enfin, nous nous autoriserons à faire rentrer un point de vue « méta-mathématique » dans la classe. Périodiquement, nous inviterons les élèves à se regarder faire des mathématiques, pour dégager des méthodes, des grands principes qui sous-tendent des branches entières des mathématiques[2]. Nous les inviterons à distinguer, lorsque c'est nécessaire, les vérités mathématiques avec les vérités scolaires que ne pouvons pas maîtriser nous-mêmes[3]. Nous pourrons aussi faire des liens entre « débat scientifique » et débat polémique, entre logique des mathématiques et logique de la vie quotidienne, entre modèle mathématique et objet modélisé. Nous inviterons aussi les élèves, quand nous jugerons la situation opportune et particulièrement à propos, à regarder le jeu didactique de la classe, son évolution au cours du débat, de l'année...

[2] Pour montrer que $a = b$, le principe de l'algèbre par exemple consiste à prouver que $a = c$ puis $c = b$ tandis que le principe de l'analyse consiste à prouver que $a-b$ est plus petit que tout nombre strictement positif.

[3] En particulier dans les classes à examen.

La dévolution du Vrai et du Faux.

Afin de marquer les esprits et de pouvoir débattre sans tourner en rond continuellement, il nous est apparu comme nécessaire de mettre au point une activité « choc ».

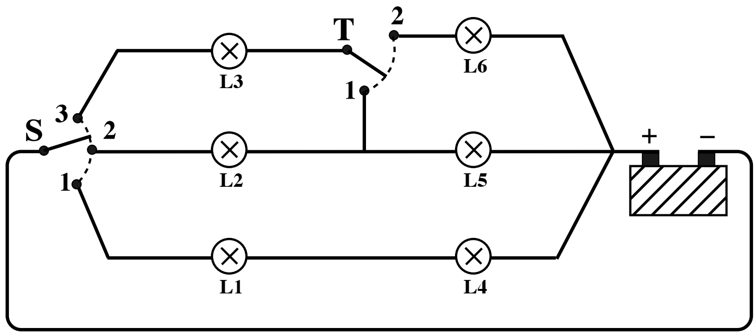
Son cahier des charges est le suivant :

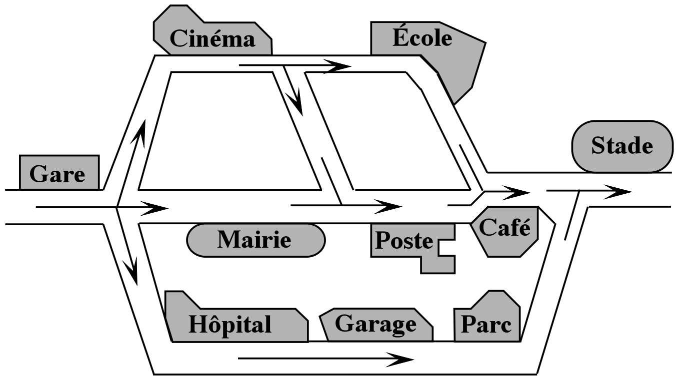
- une entrée facile pour tous les élèves, avec un thème apparemment non mathématique ;

- être centré sur l'obstacle épistémologique que représentent les règles de la logique mathématique et leurs conséquences. Pour cela, il devra être impossible de se mettre d'accord sur une solution si on n'accepte pas de jouer le « jeu » mathématique : définir les mots, modéliser la situation, accepter la vocation d'universalité des mathématiques qui contraint à définir le faux, puis le vrai comme « ce qui n'est pas faux ».

L'activité que nous avons construite et que nous appelons « Circuit », est basée sur un circuit électrique ou un circuit de bus dans une ville suivant le niveau des élèves.

Voici les deux circuits utilisés :





Pour les lycéens et les étudiants, le circuit électrique apparaît comme moins « puéril » et se prête à une expérimentation physique frappante et facile à mettre en oeuvre.

Pour les collégiens, encore peu habitués aux schémas électriques, le circuit de bus est l'occasion de découvrir un problème plus proche de ce qu'ils connaissent.

À partir de ces schémas, il s'agit de proposer une série de conjectures soigneusement orchestrées pour permettre aux élèves de prendre conscience de l'obstacle et au professeur d'institutionnaliser qu'un contre-exemple suffit à montrer le faux et que le vrai demande davantage de travail que quelques exemples.

Cette activité a été décrite par ailleurs dans plusieurs publications[4] ; une version, remaniée et corrigée, est en cours de préparation et sera diffusée sur le site de l'IREM de Grenoble.

Elle permet, après l'institutionnalisation, de pratiquer le débat sur des conjectures simples mais pas simplistes où les contre-exemples sont faciles à trouver ou à nier. Les élèves commencent à expérimenter qu'ils peuvent « penser » tout seuls et qu'ils ont les capacités à se forger une opinion sans forcément attendre la sentence du professeur.

La mise en confiance.

Au cours des semaines qui suivent l'activité circuit, il est important pour toute la classe de pouvoir continuer à expérimenter cette découverte de l'autonomie de pensée. Les situations choisies pour cela répondront à trois critères.

Elles seront ancrées dans le cours de mathématiques car, d'une part nous sommes astreints à un temps de classe non extensible et qu'il faut bien « avancer », d'autre part nous devons encore convaincre la plupart des élèves que ce qui a été fait auparavant était bien des maths, et pourra concrètement resservir tout au long de l'année.

Ces situations seront suffisamment simples pour être appréhendées[5] et pour que chacun puisse émettre des conjectures.

4 Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, 1990 (Publications inter–I.R.E.M) et Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée, 1996 par Michèle Gandit et Marie-Claire Massé-Demongeot, édition IREM de Grenoble.

5 en évitant les nouvelles notions par exemple.

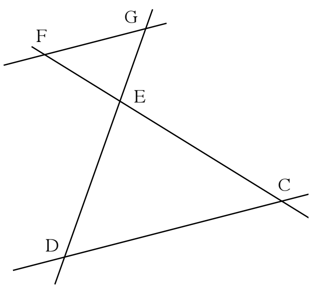
Enfin, nous devrons veiller à ce que la classe ait les moyens de résoudre seule ou presque les conjectures produites.

Petit à petit, les élèves pourront se convaincre qu'ils disposent dans les débats d'un moyen sûr pour avoir raison. Le contre-exemple sera l'outil que tous, y compris les moins scolaires, pourront brandir pour « démolir » une conjecture[6] et prouver leur valeur. Notre expérience tend à montrer que, rapidement, ils s'emparent de cet outil et apprennent à fabriquer ces contre-exemples, à partir d'essais numériques, par déformation des figures géométriques en éloignant des points vers l'infini et plus généralement en traquant toute possibilité « dans ce qui n'est pas dit ». Le travail sur l'implicite des énoncés mathématiques se révèle ici fructueux.

6 Les conjectures sont toujours reprises au tableau et identifiées par un numéro, sans référence écrite à son auteur. Cela permet que tous les élèves puissent s'en saisir et cela limite l'influence des liens affectifs au cours du débat.

Une situation en troisième

Données : E = (FC) ∩ (DG) et (FG)//(DC) Proposer des conjectures.



Voici les conjectures proposées ; aucune correction n'a été apportée sur ces conjectures lorsqu'elles sont écrites au tableau et identifiées par un numéro afin de les dépersonnaliser et de les proposer à la réflexion de la classe entière.

C1 : F,E,C sont alignés, et D,E,G aussi.
C2 : D,E,C sont les symétriques de G,E,F par rapport à E
C3 : FC = GD

C4 : $\widehat{DEC} = \widehat{FEG}$

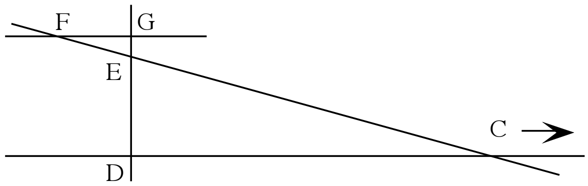
C5 : $\dfrac{EG}{GD} = \dfrac{FE}{FC}$

C6 : $\widehat{FGE} = \widehat{EDC}$

C7 : $\dfrac{FG}{DC} = \dfrac{DE}{DG}$

C8 : FEG est une réduction de DEC.

Analyse succincte : le théorème de Thalès du programme de $4^{\text{ème}}$ (dans sa version « emboîtée ») et la symétrie centrale étant acquis, la version « papillon » du théorème du programme de $3^{\text{ème}}$ n'introduit pas de notion nouvelle. Parmi les conjectures, certaines sont évidentes (C1: F,E,C sont alignés, et D,E,G sont alignés) et permettent à des élèves d'être certains de proposer des phrases vraies car ils n'osent pas encore tenter leurs intuitions. Les conjectures fausses peuvent être réfutées par des dessins de contre-exemples irrécusables (il suffit, si quelqu'un n'est pas convaincu, de tirer encore un peu plus le point vers l'infini...) comme celui-ci pour C3 (*FC=GD*).



La démonstration des conjectures vraies peut être esquissée par les élèves dès que l'idée d'une symétrie centrale apparaît. La conjecture C8 (*FEG est une réduction de DEC*) est une bonne surprise pour le professeur qui pourra s'en emparer pour commencer à institutionnaliser sur les réductions et agrandissements.

L'alternance des situations « extraordinaires » et « ordinaires ».

Au cours de l'année, la classe poursuivra son travail. Les élèves prendront l'habitude de « penser ».
Certaines notions exigent de se confronter frontalement à l'obstacle épistémologique pour avoir une chance d'être intériorisées par les élèves. Nous appelons « extraordinaires » les activités construites pour pro-

blématiser ces notions, les introduire. On peut citer l'introduction des vecteurs, celle de la dérivée ou de l'intégrale, ou encore le passage de la géométrie de perception de l'école primaire à une géométrie de démonstration au collège.

Cependant, toutes les heures de cours ne seront pas l'occasion de telles activités. Par opposition, nous appelons situations « ordinaires » ce dont est fait le quotidien de la classe traité dans l'esprit du « débat scientifique ». Elles sont essentiellement de deux natures.

En premier lieu, des débats spontanés qui naissent dans la classe à l'occasion d'une question. Le professeur problématise la question et la renvoie à la classe plutôt que d'y donner une réponse immédiate pour rassurer l'élève. Bien entendu, certaines questions pourront sembler « déjà vues » ou être du fait d'élèves peu travailleurs et/ou peu attentifs, mais leur présence indique pourtant que la classe n'est pas au clair sur ce point. Le professeur, en cessant d'être une « boîte à réponse », amène ses élèves à prendre leur responsabilité scientifique.

D'autres situations ordinaires naissent de la dévolution par le professeur aux élèves des corollaires d'un chapitre. Une fois la notion introduite, les définitions posées, le grand théorème central démontré, restent la plupart du temps des applications immédiates qui sont l'occasion pour la classe, simultanément, d'appliquer ce qui vient d'être vu et de l'intérioriser en découvrant ses limites et ses mécanismes car, si le professeur semble gagner du temps en les exposant magistralement au tableau, ce temps est souvent rapidement perdu en compréhension fine dans la suite des exercices et des corrections.

Un exemple de situation « ordinaire » en début d'année en terminale S

Après avoir donné les définitions nécessaires à l'activité, on demande : « Faites des conjectures en « si alors » avec les mots suivants : Suite croissante, décroissante, non croissante, non décroissante, majorée, minorée, non majorée, non minorée ».

Le but de cette activité est double. Il s'agit, d'une part de familiariser les élèves avec les concepts définis (suite majorée, minorée, croissante,...) et, d'autre part de faire apparaître, parmi les propositions faites, des propriétés qui résistent au débat. Ces propriétés pour lesquelles on ne trouve pas de contre-exemples et qui seront démontrées (pas forcément par les élèves) deviendront alors les théorèmes et propriétés du cours.
Voici les conjectures proposées par les élèves :

C1 : « Si une suite est croissante, alors elle est minorée et non majorée »
C2 : « Si une suite est constante, alors elle est non majorée et non minorée »
C3 : « Si une suite est strictement croissante, alors elle est minorée et non majorée »
C4 : « Si une suite est constante, alors elle est majorée et minorée,»
C5 : « Si une suite est croissante, alors elle est minorée »

Pour organiser le débat, le professeur propose ici d'étudier d'abord C1(« *Si une suite est croissante, alors elle est minorée et non majorée* ») . Les élèves sont partagés dans la classe mais, à partir d'un contre-exemple fourni par les élèves (une suite constante) et après un débat des élèves sur la croissance d'une suite constante, ils parviennent à se convaincre tous qu'une suite croissante peut être majorée. Le professeur, avant de passer à une autre conjecture « stabilise » ce travail par une « micro-institutionnalisation ». Il s'agit de permettre à la classe d'avancer car, sans cette parole du professeur, un certain doute subsiste malgré la force des arguments des seuls élèves, ce qui pourrait constituer une gêne non nécessaire pour la suite du débat.

Puis le professeur explique que la conjecture C3 (« *Si une suite est strictement croissante, alors elle est minorée et non majorée* ») représente une tentative de réparation de la conjecture C1 puisque, cette fois, la suite n'est pas seulement croissante mais strictement croissante, ce qui élimine le contre-exemple précédent (une suite constante). La classe est une fois de plus partagée et un débat a lieu où des contre-exemples sous forme de dessins sont proposés mais n'arrivent pas à convaincre.

Alors, des élèves fabriquent une suite strictement croissante à partir d'une suite inverse et parviennent à convaincre les autres qui changent finalement d'avis.
Là encore, une « micro-institutionnalisation » sera effectuée par le professeur : « on ne peut pas attendre de la seule croissance d'une suite, stricte ou pas, un renseignement sur sa majoration. Ces deux conjectures sont finalement trop « gourmandes » : elles demandent beaucoup en donnant trop peu ».

Reste l'étude de C5 (« *Si une suite est croissante, alors elle est minorée* ») : la classe la déclare unanimement vraie. Un élève va proposer une idée de la démonstration et le professeur va l'aider à formaliser cette idée.
L'étude de C2 (« *Si une suite est constante, alors elle est non majorée et non minorée* ») et C4 (« *Si une suite est constante, alors elle est majorée et minorée* »), conjectures qui n'ont pas été examinées à ce stade, ne présente plus un grand intérêt, car le débat a déjà permis aux élèves de s'approprier le sens des définitions et ces deux conjectures ne sont plus problématiques pour eux. On passera vite dessus.

Enfin, vient l'institutionnalisation où l'on situe le chemin parcouru : la conjecture initiale qui a tenté une bonne partie de la classe mais qui s'est avérée fausse. Puis sa pseudo-réparation qui apparaissait séduisante et qui n'a pas résisté à l'étude non plus. Et, finalement, l'abandon du lien croissante/non majorée. Le théorème : « Une suite croissante est minorée » est beaucoup plus pauvre que les conjectures proposées initialement, mais c'est le seul qui résiste à l'analyse et peut être démontré. Ainsi, apparaissent au cours du débat les résultats positifs (les théorèmes), les résultats négatifs (conjectures tentantes mais fausses) mais aussi un point de vue « méta » qui fait que l'aventure vécue est replacée dans la perspective de la démarche scientifique et de la construction erratique de la vérité.

Cette activité est dite « ordinaire » car elle permet simplement de préciser le sens de certaines définitions et de mettre en évidence, parmi des résultats faux, certains résultats vrais que l'on nommera théorèmes. Son but n'est pas de faire émerger la nécessité d'un nouveau concept.

Animer un « débat scientifique ».

Pendant le débat :
Le couple Doute / Certitude à l'œuvre.

Le professeur, pendant le débat, gère le tour de parole et le rythme et il respecte une neutralité épistémologique absolue, tant dans les paroles que dans la communication non verbale que les élèves décodent très bien. Le ressort du débat tient dans cette alchimie entre doute et certitude qui vit dans la classe. Le doute stimule la curiosité, l'intérêt et la confrontation des points de vue, la certitude donne à l'élève la force d'exprimer ses arguments et de les défendre. Le rôle du professeur est donc de mettre en évidence les oppositions dans la classe, de donner du poids aux affirmations trop timides ou mal exprimées. Il écrit au tableau tous les arguments donnés afin d'harmoniser les différents temps et modes de compréhension et de laisser une trace pour qu'il puisse faire une institutionnalisation fidèle au débat.

Il va remettre en perspective les contradictions quand elles n'apparaissent pas assez fortement.
Enfin il peut, à certains moments, effectuer une micro-institutionnalisation, afin de faire repartir la classe quand trop de doute semble la paralyser ou bien qu'un débat a permis de lever le voile sur une partie du problème et qu'il est nécessaire de stabiliser le travail déjà effectué.

L'institutionnalisation :
établir des certitudes.

L'institutionnalisation va partir des éléments du débat. Elle valorise les arguments des uns et des autres pour ancrer les notions abordées.
Souvent, lorsque le débat aura fait surgir une problématique et aura rendu les élèves avides d'une réponse, elle prendra en charge les démonstrations non élémentaires qu'il serait mensonger de prétendre demander aux élèves de retrouver en quelques minutes, là où des années ou même des siècles ont été nécessaires à la communauté mathématique.
Les conjectures fausses ont aussi leur place dans le cours, particulièrement lorsqu'elles sont très séduisantes et que les contre-exemples ont été difficiles à faire apparaître.
Enfin, c'est le moment d'évoquer le « méta » et d'associer à une notion des remarques de didactique, de pertinence ou de parler du plaisir[7] qu'on peut avoir en mathématiques.

[7] Osons le mot !

Un autre exemple de débat :
Introduction à une nouvelle définition de la limite en terminale S

Il s'agit là d'une situation que nous classons plutôt parmi les situations « extraordinaires », car elle fait apparaître la nécessité d'une nouvelle façon de regarder un objet ou un concept mathématique, ici la notion de limite.
Cette situation a été expérimentée en classe de terminale S et nous allons la relater brièvement afin de regarder comment se déroule une telle situation, le rôle du professeur et l'activité des élèves.

Tout d'abord une conjecture est soumise au débat :

$$Si \lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x), alors\, f(x) < g(x)$$

Après un temps de réflexion, l'ensemble des élèves déclare fausse la conjecture et l'un d'eux vient dessiner un contre-exemple au tableau alors qu'un autre propose un deuxième contre-exemple sous forme de formules de fonctions.

Le professeur demande alors : « comment réparer cette conjecture ? »

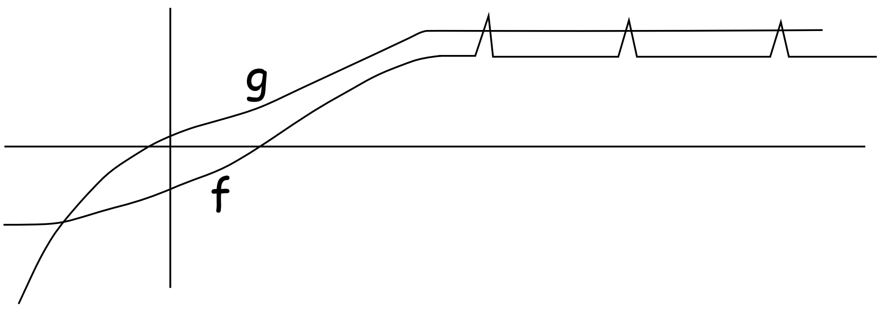
Les élèves proposent d'ajouter à la conjecture « à partir d'un certain rang ».

Le professeur explique qu'en mathématique, on traduit « à partir d'un certain rang » avec « il existe un nombre tel que... »

La nouvelle conjecture est mise au débat :

$$Si \lim_{x\to+\infty} f(x) < \lim_{x\to+\infty} g(x), alors \; \exists A \; tel\ que,$$
$$pour\ tout\ x > A, on\ a\ f(x) < g(x)$$

Parmi les élèves, beaucoup pensent vraie cette conjecture mais un élève propose le « monstre » suivant :



Ceci peut sembler un coup de théâtre inattendu mais, en réalité, le professeur attendait cet argument pour la suite de cette situation. Les élèves, quand ils ont l'habitude du « débat scientifique », font souvent preuve de grande inventivité et manifestent souvent une sorte de « génie ». De toute manière, si cet argument n'était pas venu seul, le professeur l'aurait fait apparaître lui-même, bien évidemment sans donner son avis à son sujet.

Ce pseudo-contre-exemple fait alors changer l'opinion de certains élèves, qui pensent finalement que la conjecture est fausse alors que d'autres refusent ce contre-exemple, affirmant qu'ici la fonction f n'admet pas de limite.

Devant le désarroi (prémédité) de la classe, le professeur explique la nécessité de définir la limite et propose une première définition (ou plutôt la pseudo-définition qu'on est invité à donner en première !). Le but est évidemment de faire prendre conscience que cette définition ne permet pas de trancher la situation. « Limite en l'infini de f(x) = L s'il existe A tel que, pour tout x plus grand que A, on a : f(x) est proche de L » ; c'est alors que se déroule l'échange suivant : brouhaha dans la classe et réaction immédiate de Nicolas.

Nicolas : - Est-ce qu'on a un ordre de grandeur pour "proche" ? Est-ce qu'il y a une certaine valeur ? Car, ici, on peut dire que c'est proche, comme pas proche !

Prof : - Tu veux dire ici : que veut dire proche ?

Nicolas : - C'est ça !

Prof : - Ici, pour toi, c'est proche ou pas ?

Autre élève : - Ça dépend de l'échelle !

Nicolas : - Oui, mais si ici on dit 0,1 "c'est proche" et au-dessus " c'est pas proche" ; si ça se trouve, celle-là, ça ne va pas !

Prof : - Pour toi, que veut dire proche ? Proche, pourrais-tu dire de combien ?

Autre élève : - À 1 !

Autre élève : - Ça dépend des conditions.

Autre élève : - À 0,1.

Nicolas : - Là, on ne sait rien car 2 c'est proche de 1 mais si la courbe est très bizarroïde ça peut être autre chose !

Prof : - Tu peux proposer autre chose ?

Nicolas : - On sait pas trop !

Autre élève : - Si on a une énorme courbe comme ça (force gestes) une courbe de fou, (rires) et qu'il y a cinq de différence ça peut être très proche !

Prof : - Si on a un truc monstrueux...

Autre élève : - Alors, ici, comme c'est tellement infime, on peut considérer que c'est "pas proche" !

Notre sentiment, après un tel échange, est que le *epsilon* que le professeur va proposer comme réponse à la demande de mathématisation des termes courants « proche » / « pas proche » a beaucoup de chance de prendre sens pour beaucoup d'élèves et qu'ils vont pouvoir s'en saisir, dans une suite d'activités préparées à cet effet, pour démontrer ce qu'ils croient être vrai ou faux.

Conclusion

Notre volonté est de confier davantage de responsabilité scientifique à l'élève dans le cours de maths. Nous avons, dans ces quelques pages, essayé de vous présenter un aperçu de notre pratique du « débat scientifique » en classe qui tente de réaliser cette ambition.

Nos expérimentations et pratiques personnelles nous assurent que ce jeu est jouable dans toutes les classes. Elles nous assurent que ce jeu enrichit mutuellement l'élève et le professeur : l'élève en lui donnant la possibilité de donner un sens plus intériorisé aux notions qu'il étudie, et le professeur en lui faisant découvrir les élèves sous un nouveau jour, mais aussi en profitant de leurs questions qui, sous des apparences naïves, révèlent parfois une profondeur épistémologique qu'il n'avait pas soupçonnée, cela lui donnant chaque jour plus de facilité et d'autorité pour mener le cours de cette manière.

Mais cette didactique nécessite un changement total de paradigme d'enseignement : là où, habituellement, le professeur chasse le doute de la classe, il va au contraire le faire vivre et là où le professeur habituellement déproblématise le savoir, afin de le rendre plus digeste, il va au contraire le problématiser...
Ce changement didactique, « révolution culturelle » pour la classe et le professeur que nous avons essayé de décrire succinctement, est fondamental si nous voulons qu'effectivement la dynamique et l'investissement réel des élèves que nous vous avons présentés s'installent durablement et efficacement.

Pour tous ceux qui aimeraient en savoir plus, un texte de synthèse sur le thème est disponible sur simple demande aux auteurs et le site de l'IREM de Grenoble :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/new2006/accueil/

permet d'en télécharger (choisir « Travaux en cours » puis « Groupe Débat Scientifique »).
Enfin, le « Groupe débat scientifique » de l'IREM de Grenoble propose de nouveau plusieurs ateliers aux Journées Nationales de Besançon (voir le BGV 134 « spécial Journées »).