Une suite logique ?
Des suites et des logiques !

Serge Parpay

Après avoir envahi les pages « jeux » des magazines, puis fleuri dans les tests d'embauche, le fameux « Compléter la suite logique… » pointe parfois son nez dans les exercices de rallyes mathématiques. Cela a inspiré à notre collègue Serge Parpay des réflexions qu'il livre à PLOT.

Serge Parpay, retraité, anime la rubrique *Exercices de ci, de là* du Bulletin Vert et il fait toujours partie de l'équipe du Rallye Mathématique Poitou-Charentes.

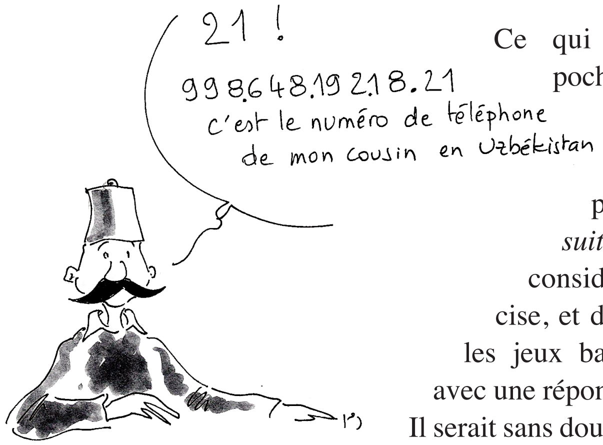
Complétez les suites logiques :

1) « 1 ; 2 ; … » : « 3 » dit le petit élève,
: « 1 ; 2 ; 1 ; 2 « dit le militaire !

2) « 1 ; 2 ; 3 ; … » : « 4 ; 5 » dit le petit élève,
: « 1 ; 2 ; 3 » « On prend les mêmes et on recommence » comme en … non, nous ne le dirons pas, car on ne fait pas de politique dans PLOT !
: « Partez » dit le directeur de course.
: « 5 ; 8 » dit Léonard de Pise (Fibonacci).

3) « 1 ; 3 ; 9 ; … » : « 27 » dit celui qui connaît ses classiques,
: « 19 » dit un professeur farceur.

4) 998 ; 648 ; 192 ; 18 ; … » : « … Euh » dit Léa Broutille,
: « 8 » dit l'auteur de l'exercice dans une compétition mathématique, car $9 \times 9 \times 8 = 648$; $6 \times 4 \times 8 = 192$; $1 \times 9 \times 2 = 18$; et $1 \times 8 = 8$.
: « 514 » dit le Prof Ila Ransor !



Ce qui précède était une pochade.

Encore que cela tendait à prouver que la phrase « *Compléter la suite logique* » peut être considérée comme imprécise, et donc inéquitables sont les jeux basés sur cette phrase avec une réponse imposée d'avance. Il serait sans doute préférable de dire : « Complétez la suite de nombres en précisant la règle que vous vous donnez ».

La suite 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; … est bien connue ; inutile d'y revenir.
Les suites 1 ; 3 ; 9 ; 19 ; et 998 ; 648 ; 192 ; 18 ; semblent plus bizarres ; et pourtant !

D'où ce petit article — sans prétention puisqu'il récapitule des idées classiques.

Nous traiterons la suite 998 ; 648 ; 192 ; 18 ; … Pour la suite 1 ; 3 ; 9 ; …, nous laisserons au lecteur le soin d'utiliser les mêmes techniques.

1) Les différences finies *

Cette méthode conduit au tableau ci-dessous, d'où le nombre 514 proposé.

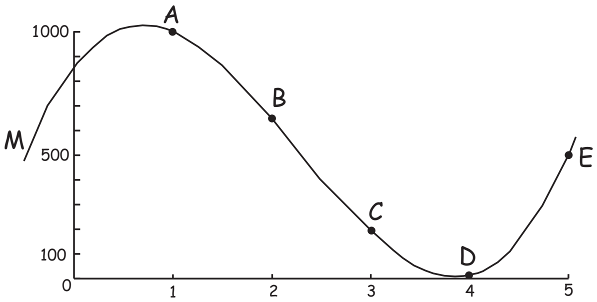
998	648	192	18
350	456	174	
-106	282		
-388			

998	648	192	18	514
350	456	174	-496	
-106	282	670		
-388	-388			

2) Une courbe

A (1 ; 998), B (2 ; 648),
C (3 ; 192), D (4 ; 18).
Le nombre cherché serait l'ordonnée du point E d'abscisse 5, soit environ 500.
Ce n'est pas très précis, mais enfin …!

Un fil d'acier passant par des anneaux en A, B, C et D et tenu, sans forcer, aux extrémités donnerait-il la même allure de courbe ?



3) Un système

Mais tiens ! Pourquoi pas expliciter cette fonction polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré ?

Soit alors $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
$f(1) = 998$: $1^3a + 1^2b + 1c + d = 998$
$f(2) = 648$: $2^3a + 2^2b + 2c + d = 648$
$f(3) = 192$: $3^3a + 3^2b + 3c + d = 192$
$f(4) = 18$: $4^3a + 4^2b + 4c + d = 18$
On calcule (a, b, c, d) solutions du système, d'où :

$$f(x) = \frac{194}{3}x^3 - 441x^2 + \frac{1561}{3}x + 854$$

et $f(5) = 514$ qui est bien le nombre proposé !

Remarque : La méthode 1) se justifie évidemment à partir de la 3), mais ne nécessite pas la résolution, un peu laborieuse sans calculatrice, du système 3).

4) Un polynôme de Lagrange

Soit le polynôme

$$F(x) = A\frac{(x\text{-}b)(x\text{-}c)(x\text{-}d)}{(a\text{-}b)(a\text{-}c)(a\text{-}d)}$$

avec a, b, c et d tous différents entre eux.
$F(a) = A$; $F(b) = 0$; $F(c) = 0$ et $F(d) = 0$.

En utilisant cette idée, on détermine le polynôme de Lagrange satisfaisant aux conditions imposées :

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 998\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ & +648\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ & +192\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ & +18\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \end{aligned}$$

Soit

$$f(x) = \frac{194}{3}x^3 - \frac{1323}{3}x^2 + \frac{1561}{3}x + \frac{2652}{3}$$

C'est bien sûr le résultat trouvé en 3).

Conclusion

Quand on vous propose une « suite logique », vous pouvez toujours utiliser la méthode du polynôme de Lagrange ou celle des différences finies plus immédiate et dire 514 au lieu de 8, ou 1, 3, 9, 19, 33 au lieu de 1, 3, 9, 27, 81. Vous n'aurez pas tort si vous annoncez la méthode « logique » utilisée.

* NDLR : La méthode des différences finies est une sorte d'analogue discret de la dérivée. C'est une méthode efficace pour extrapoler le terme suivant d'une suite de nombres dont les premiers termes sont connus. Elle consiste à postuler que ces termes sont les images des premiers entiers par une fonction polynomiale, puis à établir une table de différences à partir des termes connus.

a b c d
a-b b-c c-d
etc

Lorsque la dernière différence est atteinte, on suppose que les termes de la ligne de celle-ci sont constants (suite de croissance nulle, la ligne suivante ne produirait que des zéros). Et on peut « remonter » en faisant des soustractions. Cette façon de faire évite d'avoir à expliciter le polynôme (ici de degré 3, puisque « dérivée » nulle au $4^{\text{ème}}$ rang) pour lequel les images de 1, 2, 3, 4 seraient respectivement 998, 648, 192,18) .