En relation avec Chasles

Henry Plane

Lorsqu'un élève rencontre une écriture telle que : $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$, il est de bon ton qu'il évoque le nom de Chasles*.

Mais, qu'enseignait Chasles ?

Divers témoignages rapportent que, dès 1840, ce géomètre usait de segments rectilignes orientés. Toutefois, ce n'est qu'en 1860 qu'il publia son « Traité de géométrie supérieure ».

Ouvrons ce livre.

Il est toujours tentant de mettre à la disposition des élèves, lorsqu'on le peut, les textes écrits qui sont comme des actes de naissance des notions dont il est fait usage. Mais cela ne doit pas se faire sans précautions. L'exemple qui suit incite à la prudence, semble-t-il.

* Michel Chasles (Epernon 1793 – Paris 1880) domina, en son temps, le domaine de la géométrie. Il fut membre d'une vingtaine d'Académies des Sciences à travers le monde.

CHAPITRE PREMIER.

AVERTISSEMENT RELATIF A L'USAGE DES SIGNES + ET — POUR DÉTERMINER LA DIRECTION DES SEGMENTS RECTILIGNES OU DES ANGLES.

1. Définition. — Quand le segment compris entre deux points *a*, *b* sera représenté par *ab*, nous dirons que le point *a* est son *origine*. S'il est représenté par *ba*, ce sera le point *b* qui sera regardé comme étant son origine.

Manière d'indiquer la direction des segments. — Quand nous aurons à considérer sur une même droite plusieurs segments, nous indiquerons leur direction en regardant comme *positifs* tous ceux qui seront dirigés dans un même sens convenu, à partir de leurs *origines*, et comme *négatifs* tous ceux qui seront dirigés dans le sens contraire, c'est-à-dire que nous donnerons, dans le calcul, le signe + aux premiers et le signe — aux autres.

D'après cela, si le segment compris entre deux points *a*, *b*, étant représenté par *ab*, est *positif*, représenté par *ba* il sera *négatif*; de sorte que l'on dira que $ab = -ba$.

Il s'agit bien ici de segments et non de mesures.

Dans la pratique de ce principe de convention, nous ferons continuellement usage de la proposition suivante, relative à trois points en ligne droite.

2. Théorème fondamental. — *Étant pris trois points* a, b, c, *dans un ordre quelconque, sur une même droite, la somme des trois segments consécutifs* ab, bc, ca *est toujours nulle.*

C'est-à-dire que l'on a toujours

$$ab + bc + ca = 0,$$

en donnant aux segments les signes qui leur conviennent.

En effet, les trois points ne donnent lieu, quant à leur ordre respectif, qu'à trois cas différents ; car, les deux a, b étant placés, l'ordre respectif des trois dépendra de la position qu'on donnera au troisième c, lequel ne peut prendre que trois positions différentes, savoir au delà du segment ab, à droite ou à gauche, ou bien sur le segment lui-même, ce qui donne lieu aux trois séries a, b, c ; c, a, b et a, c, b. Or on passe d'une série à une autre par la permutation de deux lettres, et l'équation

$$ab + bc + ca = 0$$

ne change pas par cette permutation ; il s'ensuit donc que le théorème sera vrai dans les trois cas s'il l'est dans un. Prenons les trois points dans l'ordre a, b, c de la première série ; les trois segments ab, bc et ac sont de même signe, et la somme des deux premiers est égale au troisième, savoir :

$$ab + bc = ac.$$

Mais $ac = -ca$; donc

$$ab + bc + ca = 0.$$

Si une somme de segments est un segment, qu'est-ce que le segment noté o ?
Notons également que la « compensation » algébrique s'applique naturellement aux segments !
Un premier problème : le changement d'origine avec lequel intervient la notion de distance. Est-elle avec ou sans signe ?

Corollaire I. — *Quand la position d'un point* a *est déterminée par sa distance à une origine* O, *si l'on veut le rapporter à une autre origine* O', *on fait toujours, quel que soit l'ordre relatif des deux origines et du point* a,

$$Oa = O'a - O'O.$$

En effet, comme $O'a = -aO'$, cette relation dérive de celle-ci

$$Oa + aO' + O'O = 0,$$

qui a lieu entre les trois points O, O' et a, quelle que soit leur position respective.

Substituer ainsi une origine O' à une autre s'appelle *changer l'origine des segments.*

On aura remarqué que, en ce qui concerne le signe « — », il en est fait usage aussi bien pour retrancher (— O'O) que pour désigner le changement de sens
(O'a = — aO').
Dans le second corollaire c'est la différence qu'il signifie, sans conteste.

Corollaire II. — *La différence de deux segments* Oa, Ob *qui ont une origine commune, savoir* (Oa — Ob), *est toujours égale à* ba, *quelles que soient les grandeurs et les directions des deux segments.*

Car l'équation

$$Oa - Ob = ba$$

donne

$$Oa + ab + bO = 0,$$

ce qui est la relation entre les trois points O, a, b.

On peut encore dire que *la distance de deux points* a, b *s'exprime, en fonction des distances de ces points à une origine commune* O, *par la relation*

$$ab = Ob - Oa.$$

On ne peut nier que, dans ce texte, les symboles +, —, o remplissent allègrement plusieurs rôles et que les mots segment, longueur et distance interfèrent de même. Il apparaît, donc, que ce ne saurait être sans précautions et sans accompagnement de l'enseignant qu'il convienne de mettre un nouvel utilisateur de la relation dite de Chasles en présence du texte du dit Chasles.