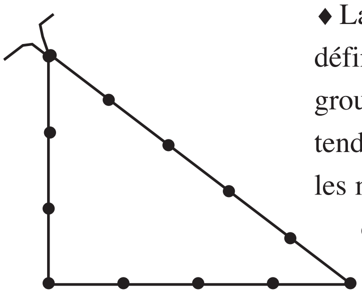
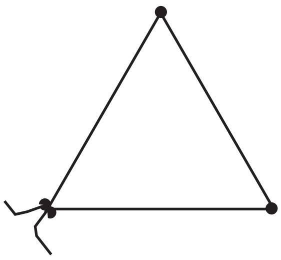
La corde à nœuds

Henry Plane

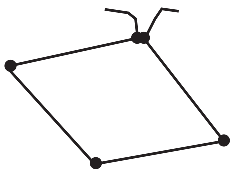
Pour commencer : des rappels.



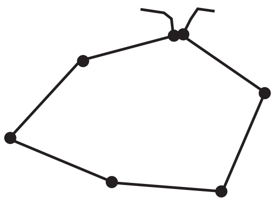
♦ La plus célèbre est celle à 13 nœuds qui définissent 12 intervalles égaux, lesquels groupés en trois lignes de 3, 4 et 5 brins tendus forment un triangle rectangle. Tous les mémoires de bâtisseurs de cathédrales en parlent.



♦ La corde à 4 nœuds — 3 brins égaux — engendre un triangle équilatéral avec ses angles de π/3 (60°). Pourquoi la négliger ?



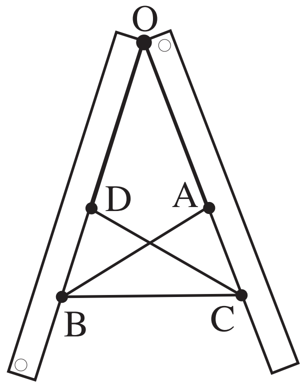
♦ La corde à 5 nœuds — 4 brins égaux — fournit des losanges.



♦ Les cordes à 6, 7, 8… nœuds, — donc 5, 6, 7… n brins égaux — donnent des polygones équilatères mais qui, même s'ils sont convexes, ne sont pas forcément équiangles, donc ne sont pas réguliers. Ce peut être une occasion de le rappeler à qui va trop vite…

♦ La corde à 5 brins mérite notre attention. En effet, elle peut permettre de résoudre le problème dit de « moyenne et extrême raison » et, par là, de construire décagones et pentagone réguliers à moins que ce soit de faire apparaître le « nombre d'or » qui ravissait nombre d'usagers des « Élémens d'Euclide ».

On formera la figure ci-dessous, toujours avec des brins tendus.



Les points O, A et C d'une part, et O, D et B d'autre part sont alignés (l'usage de la règle n'est pas interdit). Cette double condition d'alignement « rigidifie » l'ensemble et impose la symétrie par rapport à la médiatrice de [BC] ainsi que d'autres propriétés aidant à la réalisation :

(AD) // (BC)

BD = DA = AC

$OA^2 = OC.AC$ (EUCLIDE II, 10).

Alors, comme $\widehat{COD} = \widehat{DCO}$,

$\widehat{BDC} = \pi - \widehat{ODC} = 2\widehat{COD}$ et donc

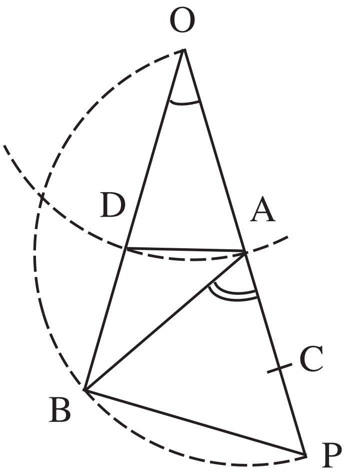
$\widehat{DBC} = 2\widehat{COD} = 2\widehat{COB}$

Et dans le triangle OBC :

$$(1+2+2)\widehat{BOC} = \pi, \text{ d'où } \widehat{BOC} = \frac{\pi}{5}.$$

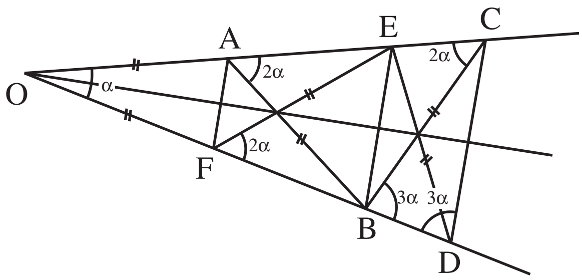
* Dans le cercle de centre O et de rayon OA, [AD] est le côté du décagone régulier convexe inscrit, comme [BC] l'est dans le cercle concentrique de rayon OB.

* Par ailleurs, dans le cercle de centre A et de rayon AO passant par O, B et P (OA = AP), [BP] est le côté du pentagone régulier convexe inscrit.



En effet, $\widehat{BAP} = 2 \times \frac{\pi}{5}$ (cf. EUCLIDE IV, 11 , angle au centre et angle inscrit). Notons que ces deux derniers cercles ont le même rayon.

♦ Grimpons ! Corde à 7 brins (8 nœuds)
Même principe de formation de la figure.

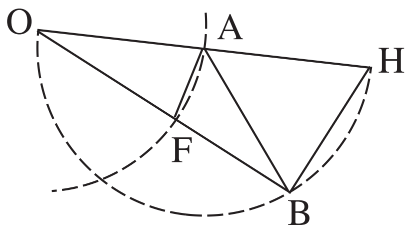


* O, A, E, C d'une part et O, F, B, D d'autre part sont alignés.

* La médiatrice de [CD] est axe de symétrie. (AF // EB // CD) : trapèzes isocèles.

* Si $\widehat{COD} = \alpha$, alors $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} = 2\alpha$

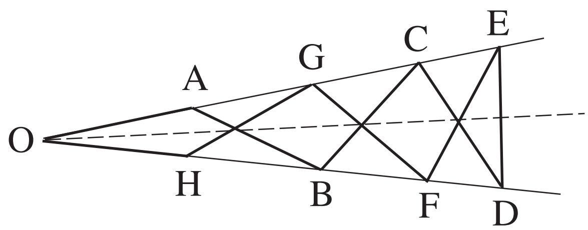
et $\widehat{CBD} = \widehat{BDC} = 3\alpha$.
En effet,
$\widehat{\mathrm{ABO}} + \widehat{\mathrm{CBD}} = \widehat{\mathrm{BAC}} + \widehat{\mathrm{BCA}} = 4\alpha$
(ce sont deux manières d'écrire le supplémentaire de l'angle ABC).
Donc (1 + 3 + 3) α = π dans le triangle OCD et α = π/7.



* Par suite [CD] est le côté du « 14 — gone » régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OC, et [AF] dans celui de centre O et de rayon OA. Si on considère le point H défini par OA = AH, ce point fournit [BH] côté de l'heptagone régulier convexe inscrit dans le cercle de centre A et de rayon AO — cercle de rayon égal au précédent—.
Ici, $\widehat{\mathrm{BAH}} = \widehat{\mathrm{AOB}} + \widehat{\mathrm{ABO}} = 2\alpha = 2 \times \frac{\pi}{7}$.

* Autres propriétés géométriques, conséquences de la construction.
- Segments : les triangles OAF et CBD sont égaux, donc AF = BD = EC.
BAE est un triangle isocèle :
$\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{OBE}} - \widehat{\mathrm{OBA}} = 2\alpha = \widehat{\mathrm{BAE}}$.
Par suite, EB = AE = FB (3 côtés du trapèze central AFBE).
- Angles : $\widehat{\mathrm{ABC}} = 3\alpha$ de même que $\widehat{\mathrm{CBD}}$, donc (BC) est bissectrice de $\widehat{\mathrm{ABD}}$.
$\widehat{\mathrm{FAB}} = 2\alpha$ de même que $\widehat{\mathrm{BAE}}$,
donc (AB) est bissectrice de $\widehat{\mathrm{FAE}}$.

♦ 6, 8 nœuds ; 5, 7 brins. Et si on continuait ?
10, 12 nœuds ; 9, 11 brins ?
2n nœuds et 2n – 1 brins ?
Généraliser est une vieille habitude de matheux…



Ainsi en essayant, selon le procédé ici, de réaliser deux alignements de n nœuds, on obtient un angle de $\pi/(2n - 1)$ et, par suite, une construction approchée d'un polygone régulier à $(2n - 1)$ côtés, ce qui, sauf pour quelques cas rarissimes (3, 5, 17,…), n'est pas réalisable à la règle et au compas.

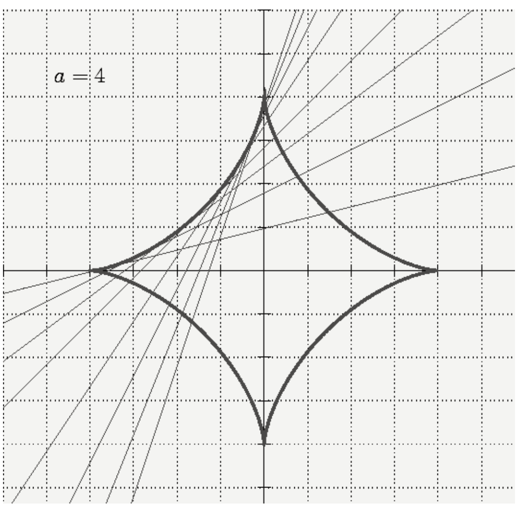
Les amateurs de « Meccano » assembleront, à cette fin, des bandes d'un même nombre de trous pour un résultat analogue.

Les enseignants trouveront là une mine d'exercices sur les angles, les triangles, les trapèzes, en adjoignant à la figure réalisée les bords et divers échelons transversaux.

Pour un dictionnaire de mathématiciens

Gilbert Walusinski (voir pages 16-17) avait une autre passion que celle de l'enseignement des mathématiques : l'astronomie. Il avait animé très tôt dans sa carrière des clubs d'astronomie avec ses élèves et il était, avec des astronomes chercheurs, à l'origine de la création du CLEA (Comité de Liaison Enseignants/Astronomes).
La revue de cette association s'intitule « Les Cahiers Clairaut », nom choisi par Gilbert en hommage à Alexis Clairaut, mathématicien astronome qui vivait au Siècle des Lumières.

CLAIRAUT (Claude Alexis) — Paris (1713, 1765)



Ses recherches sur les courbes à double courbure lui valurent d'entrer à l'Académie des Sciences dès l'âge de 18 ans. Elles constituent le premier ouvrage d'ensemble relatif à l'extension de la géométrie analytique aux figures à trois dimensions.

Ayant déterminé avec, entre autres, Maupertuis et Celsius, la longueur d'un degré de méridien terrestre en Laponie, il a développé une théorie de la forme de la Terre fondée sur les différences d'accélération de la pesanteur entre le pôle et l'équateur.

Il a appliqué la théorie de la gravitation universelle de Newton à la détermination, en particulier, du retour de la comète de Halley à distance minimale du Soleil en tenant compte des perturbations dues à l'action de Jupiter et Saturne.