Osons la difficulté

Jean-Pierre Massola

L'histoire commence par un échange de correspondances entre les membres de la régionale Ile de France de l'APMEP au sujet des exercices du Tournoi des villes destiné à des élèves de la 4$^{\text{ème}}$ à la Terminale avec deux niveaux de difficultés. Or, certains de ces exercices ont plongé ces collègues dans des affres que l'on peut légitimer. Un enseignant de métier confronté à des exercices qui s'adressent à des élèves de quatrième et qui peine, souffre de ses difficultés sans toujours trouver une réponse satisfaisante. Comment gérer cette situation ?

Jean-Pierre Massola est professeur de mathématiques à l'IUFM de Paris (site des Batignolles et d'Auteuil)

Je vois deux réponses possibles :

- Ces exercices s'adresseraient à de futurs « ulmiens » en quête d'émotions intellectuelles particulièrement fortes. Dans ce cas, on ne les proposera pas à nos élèves « lambda » par crainte de l'effet négatif d'un échec programmé.
- Ces exercices ayant un intérêt mathématique non négligeable, nous allons les proposer dans nos classes mais en les reformulant, en les adaptant à notre public.

Et si les exercices de rallye, d'olympiades et autres concours généraux ou particuliers servaient de support à notre enseignement ?

Avant d'expliciter, sur deux exemples, en quoi consisteraient ces adaptations, je vais dévoiler certains de mes a priori de professeur de mathématiques passionné de résolution de problèmes.

Pour moi, amateur de jeux, d'énigmes et problèmes mathématiques en tout genre, faire des maths, c'est résoudre des problèmes. Mais, pour que cette résolution reste liée au plaisir, il me faut la réunion de deux conditions :

- ma recherche est paresseuse ou plutôt lente et ne peut se décliner avec une idée de temps limité ;
- ma recherche est très souvent buissonnière. Elle emprunte des chemins de traverse, s'égare pour reprendre un autre chemin, pas forcément meilleur, mais l'analyse de ces « chemins erronés » m'a souvent permis de mieux comprendre le problème proposé ou lors d'une autre promenade mathématique me dissuader de prendre une mauvaise piste.

En tant que professeur de maths, je pense qu' « enseigner les maths » consiste à apprendre à résoudre des problèmes. Ce qui nous donne un double objectif :

- l'apprentissage de contenus, techniques etc…
- l'apprentissage de la résolution de problèmes. L'objectif précédent étant presque complètement justifié par le second.

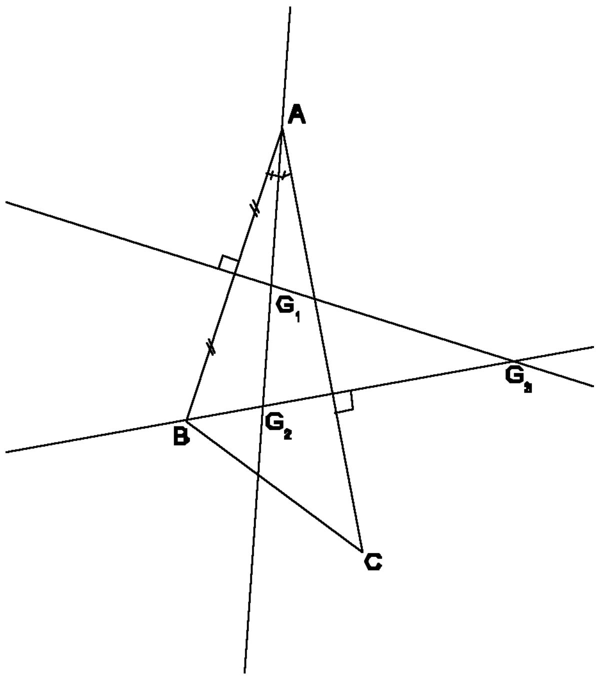
Cet apprentissage est difficile à poser en termes de programmes. Il n'a pas la linéarité que les relations entre contenus permettent. De plus, il s'appuie sur des notions encore plus difficiles à décliner :

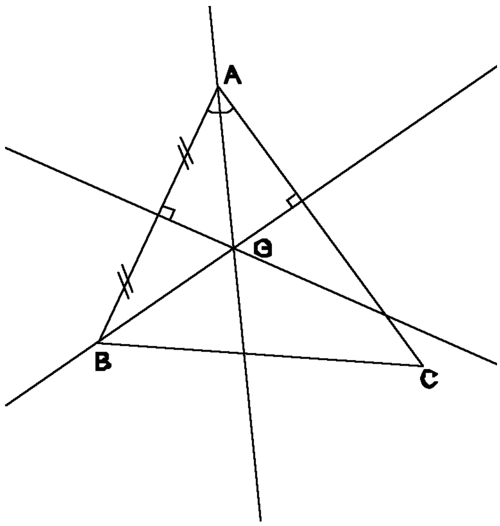
- la résolution de problèmes s'appuie bien souvent sur une « culture » de la résolution de problèmes (le « cela me rappelle…») ;
- elle s'appuie également sur la mise en relation de diverses connaissances souvent apprises indépendamment les unes des autres.

Voyons donc deux des problèmes que proposait ce tournoi des villes à des élèves ordinaires de quatrième, troisième et seconde.

Exercice N°1
Soit ABC un triangle tel que la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B sont concourantes.
Montrer que la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AC] et la hauteur issue de C sont aussi concourantes.

Sous cette forme et en un temps très limité, je suis d'accord avec la majorité d'entre vous : cet exercice est presque infaisable et désespérant pour presque tous les élèves (nous sommes encore à un niveau de la scolarité obligatoire). Mais si l'on faisait abstraction du temps et si cet exercice devenait un lieu de recherche plus ou moins organisée ?
Pour cette recherche, je vais m'appuyer sur *Cabri* et la possibilité qu'il m'offre de faire des conjectures.





1ère phase : S'approprier le problème

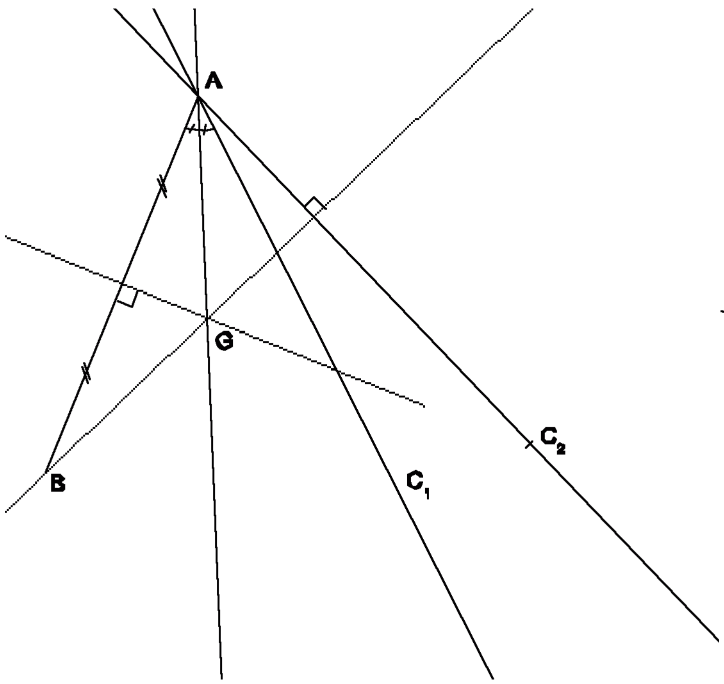
Voici deux points de départ :

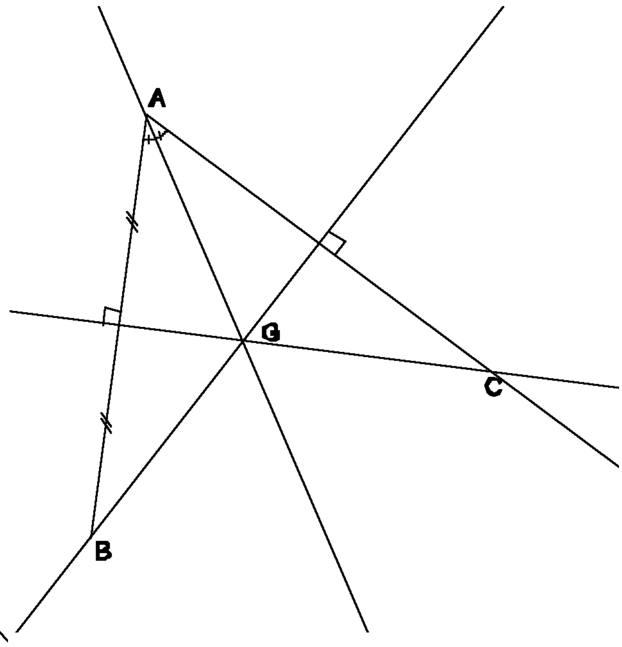
- Partons d'un triangle ABC quelconque et construisons :
  - La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$
  - La hauteur issue de B
  - La médiatrice de [AB]

Le premier dessin part d'un triangle quelconque et le second a été obtenu en déplaçant le point C jusqu'à ce que les trois points G_1, G_2 et G_3 soient confondus. J'ai choisi de déplacer C mais on aurait pu tout aussi bien déplacer A ou B.

- Autre point de départ un peu plus sophistiqué : on prend les deux points A et B, on construit la médiatrice de [AB] et on va prendre un point G sur cette médiatrice.
La droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc la droite (AC_1) est la symétrique de (AB) par rapport à (AG)
La droite (AC_2) doit être perpendiculaire à (BG).
On construit donc nos deux droites (AC_1) et (AC_2) puis on déplace G pour que ces deux droites soient confondues :

Dessins page suivante





Dans ce cas, on a beaucoup de triangles ABC, mais cela peut être d'une aide certaine pour chercher, car on pourra plus facilement se fixer sur les particularités de cette figure.

2ème phase : Élaborer des conjectures

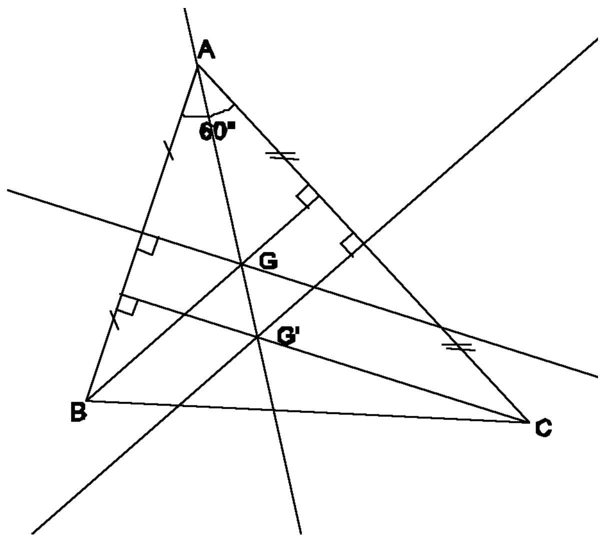
Qu'ont donc de particulier ces triangles ? Ici pointe une de nos grosses difficultés d'enseignants : « Particulier » est un particulier de matheux ! Notre « particulier » se situe au niveau des mesures d'angles, des mesures de longueurs, des formes puis des transformations.

Quand je parle des mesures d'angles, seules certaines ressortent de notre « particulier » : 30°, 45°, 60°, 90° et peut être quelques autres mais rares. Pour les longueurs, nous nous intéressons aux égalités, pour les formes de triangles : aux triangles isocèles, équilatéraux ou rectangles.

C'est peut-être dans cette phase qu'il faudra accepter le côté « buissonnier » de la recherche. Il nous faudra aussi revenir à *Cabri* et à la figure, déplacer à nouveau les points A, B, C ou G, pour affiner ou refuser une conjecture. Ici, la conjecture qui vient est : « L'angle $\widehat{BAC}$ semble bien faire 60° ».

3ème phase : La preuve

On va écrire individuellement ou collectivement une réponse à ce problème en s'appuyant sur le dessin suivant.



Mais, ici, nous allons revenir sur ce qu'est une médiatrice et sur les différents points de vue que nous offrent ces médiatrices. En particulier rappeler ou faire rechercher :

- la médiatrice d'un segment est perpendiculaire au milieu du segment ;
- les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment.

Et comme les maths c'est toujours la mise en relation de points de vue différents, qui dit « équidistants des extrémités » dit triangle isocèle, dit égalités d'angles, etc.

En deux pages, il y a, à mon avis, le contenu de cinq ou six séquences avec rappels que je trouverais très intéressantes en 4ème, ou en 3ème et 2de pour réviser quelques notions.
L'élaboration de ces séquences dépend de l'utilisation ou non d'un logiciel de géométrie dynamique avec les élèves. Je vais donc proposer deux suites de séquences, l'une avec *Cabri* dont vous comprendrez que c'est ma préférée et l'autre sans *Cabri* et que j'estime plus difficile à mener.

Avec *Cabri* (deux séances)

1) Appropriation du problème :

a. construction d'un triangle puis des droites particulières demandées et jouer de la « dynamique » de C par exemple pour essayer de faire concourir ces trois droites ;

b. construction d'un segment [AB], tracé de la médiatrice de ce segment, prendre un point G sur ce segment puis tracer la droite (Ax) symétrique de (AB) par rapport à (AG) et la droite (BG). Chercher la position de G permettant que cette ultime droite soit perpendiculaire à (Ax).

2) Conjectures et débats.

3) Rappels des propriétés de la bissectrice et de la médiatrice. Travail sur les relations entre médiatrices et triangles isocèles.

4) Travail de preuve.

Sans *Cabri*

1) Construction de plusieurs triangles (On peut donner selon les élèves des triangles différents : équilatéraux, isocèles, un avec l'angle $\widehat{BAC}$ égal à 60°, triangle rectangle, etc), construction des droites particulières.

2) Construction 1b proposée avec *Cabri* et faire conjecturer sur les valeurs possibles de $\widehat{BAC}$ pour que (BG) soit perpendiculaire à (Ax).

3) Débats.

4) Rappels et mise en relation.

5) Preuve.

Autre mise en œuvre proposée par Henri Bareil dont voici les grandes lignes

La recherche commence par un rappel sur les droites remarquables des triangles :
- par « familles », elles sont concourantes
- Ici, il y a mélange : sont concourantes une bissectrice, une médiatrice et une hauteur
- Nous savons que, dans un cas, ces droites se confondent (triangle équilatéral).

Je connais donc un type de triangle qui répond aux conditions de notre problème : le triangle équilatéral.

Le travail consiste alors à analyser l'énoncé. Pour les conditions imposées au triangle ABC, nous avons besoin de A, de « son » angle et du point B. Or, en prenant en A un angle de 60°, la position de

C nous est indifférente. Autrement dit, il **suffit** que le triangle ABC soit tel que son angle en A soit de 60°.

Une démonstration du niveau 5ème prouve que la condition est suffisante et nécessaire. Donc le triangle ABC existe et remplit la condition imposée si et seulement si $\widehat{BAC} = 60°$. Dès lors, aucune différence entre les rôles de B et de C ! Ce qui démontre instantanément que, de même que pour les droites analogues relatives au couple (A,B), la médiatrice de [AC], la bissectrice de A et la hauteur issue de C sont concourantes.

Le deuxième problème que je vous propose est numérique

> Soit *a* un entier strictement supérieur à 1 et *b* le nombre obtenu en écrivant *a* deux fois à la suite (si *a* = 123 alors *b* = 123123 ; bien sûr, *a* ne commence pas par 0).
> Donner toutes les valeurs entières que peut prendre b/a^2.

Voyons tout d'abord la forme.
On peut toujours aller plus loin dans l'obscurité de l'énoncé, en demandant par exemple :
Trouvez tous les nombres entiers tels que le nombre obtenu en juxtaposant deux fois ce nombre (12 devient 1212) soit divisible par le carré du nombre proposé.

Mais ici, on sent que le décodage semble presque plus important que la résolution du problème lui-même.
1) Si on garde la formulation initiale, le passage du mot « juxtaposer » aux opérations mathématiques sous-jacentes me semble être un passage obligé pour introduire ce problème :

- Comment passer de 4 à 44 ? Et pour les autres nombres à 1 chiffre ?
- Comment passer de 64 à 6464 ? Et pour les autres nombres à 2 chiffres ?
- Comment passer de 578 à 578578 ? Et pour les autres nombres à 3 chiffres ?

Ce travail peut parfaitement s'appuyer sur des essais. Peut-être pouvons-nous envisager une généralisation ?

2) Un second travail consisterait à reformuler cet exercice permettant de déboucher peut-être sur une ou des formulations du type :
- trouver un nombre de trois chiffres diviseur de 1001.
- trouver un nombre de deux chiffres diviseur de 101.

Dans la recherche liée à ces questions, un travail sur l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

1001 est divisible par un nombre à trois chiffres

1001 est divisible par un nombre à un chiffre

(Sous cette équivalence, il y a la commutativité de la multiplication et les équivalences multiplication-division dont on sait combien elles posent problème aux élèves).

3) On pourra alors voir que ce problème se ramène à chercher si des nombres de la forme 1000…..0001 sont divisibles par 7.

4) En se limitant à des nombres à 3 chiffres on trouvera que 143 est le seul nombre solution de ce problème.

5) Mais nous, on poursuit car tel est notre vice. Et profitant de ce que l'on connaît déjà (divisibilité de 1001 par 7), on écrit :

10 001 = 10 × 1 001 – 9

100 001 = 100 × 1 001 – 99

1 000 001 = 1 000 × 1 001 – 999

10 000 001 =1 000 × 1 001 – 9 999

100 000 001 = 10 000 × 1 001 – 99 999

1 000 000 001 = 100 000 × 1 001 – 999 999

Ici, un autre contenu intéressant consiste à comprendre que, comme 1 001 est un multiple de 7, si 999, par exemple, est multiple de 7 (c'est bien sûr faux) alors 1 000 001 est multiple de 7. Ceci n'est souvent absolument pas dominé bien qu'en relation avec les premiers apprentissages de la division.
9 ; 99 ; 999 ; 9 999 ; 99 999 ne sont pas des multiples de 7 ; par contre 999 999 = 999 × 1 001 est donc un multiple de 7 (999 999 = 7 × 142 857)

Les réponses suivantes sont donc :

142857143 est le quotient de 1 000 000 001 par 7 et
142857143142857143 = 7 × 142857143^2

Pour la beauté du geste, voici le suivant et tous les autres (c'est du pareil au même) : 142857142857143, quotient de 1 000 000 000 000 001 par 7 car, comme toute calculatrice ne vous le dira pas : 142857142857143142857142857143 = 7 × 142857142857143^2.

Un collègue m'a montré l'intérêt que l'on pourrait avoir à s'interroger sur le chiffre des unités du nombre placé à gauche du signe « égal ». Mais ceci serait un autre problème.

Comme la résolution de problèmes est souvent en relation avec des liens avec d'autres connaissances, je vous suggère de voir le lien possible avec le fait que

$1/7 = 0,\underline{142857}$

$2/7 = 0,\underline{285714}$

$3/7 = 0,\underline{428571}$

$4/7 = 0,\underline{571428}$

$5/7 = 0,\underline{714285}$

$6/7 = 0,\underline{857142}$

Mais, on vous aura prévenus, laisser vos élèves seuls face à ces problèmes n'est pas sans risque pour eux et pour vous ; transformer ces problèmes de sorte qu'ils deviennent des problèmes de recherche accessibles peut s'avérer une expérience formatrice pour tous.

Ce tournoi et les problèmes se trouvent à l'adresse suivante http://www.tournoidesvilles.fr