# Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace

Marie-Hélène Salin

*Marie-Hélène Salin, maître de conférences en Mathématiques à l'IUFM d'Aquitaine, est élue au comité de l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques) et auteur d'ouvrages consacrés à la didactique des mathématiques accessibles à tous. Le CDrom « apprentissages mathématiques en maternelle » (Hatier 2005), conçu avec Joël Briand et Martine Loubet, propose des situations (illustrées d'extraits de vidéo) à mener avec des élèves de maternelle et nous montre, à nous professeurs du secondaire, comment se construisent les savoirs mathématiques dès la première année de maternelle.*

*Sa connaissance approfondie de l'enseignement des mathématiques des cycles 1, 2 et 3 permet à Marie-Hélène Salin de nous livrer une analyse fine des difficultés de la transition CM2-sixième, pas toujours perçues par les enseignants de mathématiques que nous sommes. Son analyse, transposable à toutes les transitions de même type (troisième-seconde, voire terminale-université), montre comment une similitude apparente des contenus, masquant des différences essentielles dans l'esprit des enseignements, est à la racine des difficultés des élèves.*

## Deux anecdotes de grand-mère en guise d'introduction

*Claire, très bonne élève de 6$^{ème}$, me montre son cahier de mathématiques où j'observe que le professeur a traité la multiplication des décimaux, puisqu'elle doit effectuer 5 opérations pour le prochain cours. « C'est facile, me dit-elle, j'avais appris au CM2. » Je l'interroge : « est-ce que tu peux me donner un exemple de problème où la solution se calcule à l'aide d'une multiplication comme celle-là ? ». Et là, elle sèche totalement. Le lendemain, je lui propose le problème suivant : ta mère achète 1,350 kg de poisson à 11,60 euro le kg, combien va-t-elle payer ?[1] Pas un instant, elle ne pense à la multiplication mais elle me dit : « si c'était 1,5 kg, je saurais, parce que cela fait le prix d'un kg plus celui d'un demi-kg, là ce sera moins cher mais je ne sais pas comment le calculer. » Nous étions en vacances (à la Toussaint), pas en cours où ce problème aurait pu constituer un « problème de recherche », je l'ai donc aidée à développer son idée pour effectuer le calcul en s'appuyant sur les propriétés de la proportionnalité, et elle a été toute surprise et contente de constater que le résultat était bien celui obtenu en effectuant le produit 1,350 × 11,60.*

*J'observe Paul, en train de faire un exercice de géométrie, pris sur son manuel. La consigne commence par « reproduis la figure », il s'agit de 3 cercles d'1 cm de rayon, coupés par une droite dans 3 cas différents. Il faut associer à chaque figure une des 3 descriptions écrites, déjà formulées en dessous. Et Paul s'échine à tracer au compas, sur son cahier, de tels cercles, en maugréant : « pourquoi ils les ont fait si petits ? ». Il n'a pas compris que le terme « reproduire » ne renvoyait pas à la même signification en CM2 et dans certains exercices de 6ème (mais pas dans tous !).*

Ces deux observations portent sur des élèves, mais c'est la difficulté de l'enseignement en 6$^{ème}$ que je veux pointer en les rapportant : le professeur de Claire a dû penser que le sens de la multiplication des décimaux n'était pas à reprendre puisque les élèves savaient déjà faire les opérations[2]. Celui de Paul ne pouvait pas imaginer ce type de difficulté : pour lui, il est évident que la taille des cercles ne joue aucun rôle dans l'exercice !
Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le fait que les programmes du cycle 3 et ceux de 6$^{ème}$ portent sur pratiquement les mêmes objets mathématiques ne simplifie pas le travail du professeur. Les commentaires des évaluations nationales de 6$^{ème}$ portent souvent la mention : « cette notion est en cours d'acquisition », ce qui renvoie à la visée du programme : « consolider, enrichir et structurer les acquis de l'école primaire ». Oui mais comment, puisqu'il ne s'agit pas de refaire tout le travail effec-

[1] Notons qu'elle n'a jamais vu un adulte faire ce calcul manuellement, ni même à la machine puisque les balances donnent le prix automatiquement !

[2] Point qui n'est plus au programme du cycle 3 depuis 1995, mais que beaucoup d'enseignants de CM2 continuent de présenter à leurs élèves, pour les « avancer » pour la 6$^{ème}$.

tué à l'école primaire[3] ? Par ailleurs, une autre visée du programme est de : « préparer à l'acquisition des méthodes et des modes de pensée caractéristiques des mathématiques (résolution de problèmes, raison-nement) », oui, mais les activités qui y concourent portent sur des objets qui, pour la plupart, ont déjà été présentés à l'école primaire. Comment faire entrer les élèves dans ce nouveau rapport aux mathématiques ? Et comment articuler ces deux visées avec la troisième : « développer la capacité à utiliser les outils mathématiques dans différents domaines (vie courante, autres disciplines) » ?

L'objet de ces deux articles n'est pas de répondre à ces questions, comme s'en doute le lecteur, mais de l'alerter sur certains choix pédagogiques, qui déconcertent un nombre non négligeable d'élèves moyens à l'arrivée en 6ème, parce que trop souvent ils n'arrivent pas à comprendre le sens de ce que le professeur leur enseigne. Le risque est qu'ils se mettent à adopter un ou plusieurs des comportements bien connus : le blocage, le « n'importe quoi », ou, pour les élèves les plus dociles, une attitude basée sur la conviction qu'en mathématiques, il faut surtout « apprendre » et réciter pour réussir, même si on n'a pas compris. Les questions ne se posent pas de la même manière quand il s'agit de consolider les acquis de l'école primaire, quand il s'agit de les enrichir, et enfin quand il s'agit d'introduire aux modes de pensée caractéristiques des mathématiques. C'est pourquoi ce texte comprend trois parties, les deux premières publiées dans ce numéro, la troisième dans PLOT n° 14.

## I) Consolider les acquis de l'école primaire

Les connaissances mathématiques dont dispose un élève entrant en 6ème sont le résultat d'une longue histoire, jalonnée par des étapes inscrites dans les programmes. Pour certaines notions, l'institution considère que cette histoire, sans être terminée, est arrivée à un point où l'état « moyen » des connaissances des élèves est suffisamment avancé et stabilisé pour que le statut d'objet mathématique, tel qu'il est défini dans le savoir mathématique visé à la fin de l'école primaire soit considéré comme atteint. Dans le domaine numérique, par exemple, la connaissance des nombres entiers englobe leur rôle d'outil dans diverses situations et une part importante de connaissances sur les nombres eux-mêmes : systèmes d'écritures, ordre, techniques opératoires, rapports entre certains nombres, etc. A l'entrée en 6ème, beaucoup de ces connaissances, en particulier celles portant sur les algorithmes (sauf celui de la division) sont supposées suffisamment maîtrisées pour que le professeur de 6ème n'ait pas à réorganiser tout un enseignement à leur propos.

Mais, pour d'autres notions, cette « histoire » n'est pas suffisamment avancée pour que l'on puisse considérer que cette notion soit maîtrisée et il faut « consolider[4] les acquis » la concernant, c'est-à-dire que le professeur n'a pas à repartir de zéro mais à faire vivre aux élèves une histoire qui leur permette de revenir sur leurs connaissances, de les enraciner grâce à de nouvelles expériences, de les structurer, etc.

Prenons l'exemple des nombres décimaux, enseignés à partir du CM1, pour lesquels les résultats des évaluations nationales attestent bien que l'enseignement n'est pas terminé. Pour comprendre les questions que pose cette « consolidation » aux professeurs, je crois qu'il est nécessaire de résumer les différentes étapes par lesquelles passent les élèves dans les deux années précédant la 6ème.

Actuellement, l'écriture à virgule est introduite comme une nouvelle écriture pour les fractions décimales. Mais le travail sur celles-ci est précédé, le plus souvent[5], par l'introduction de fractions de dénominateur simple, par exemple dans le contexte présenté ci-après[6], qui permet, dès le départ, de donner du sens aux fractions supérieures à 1.

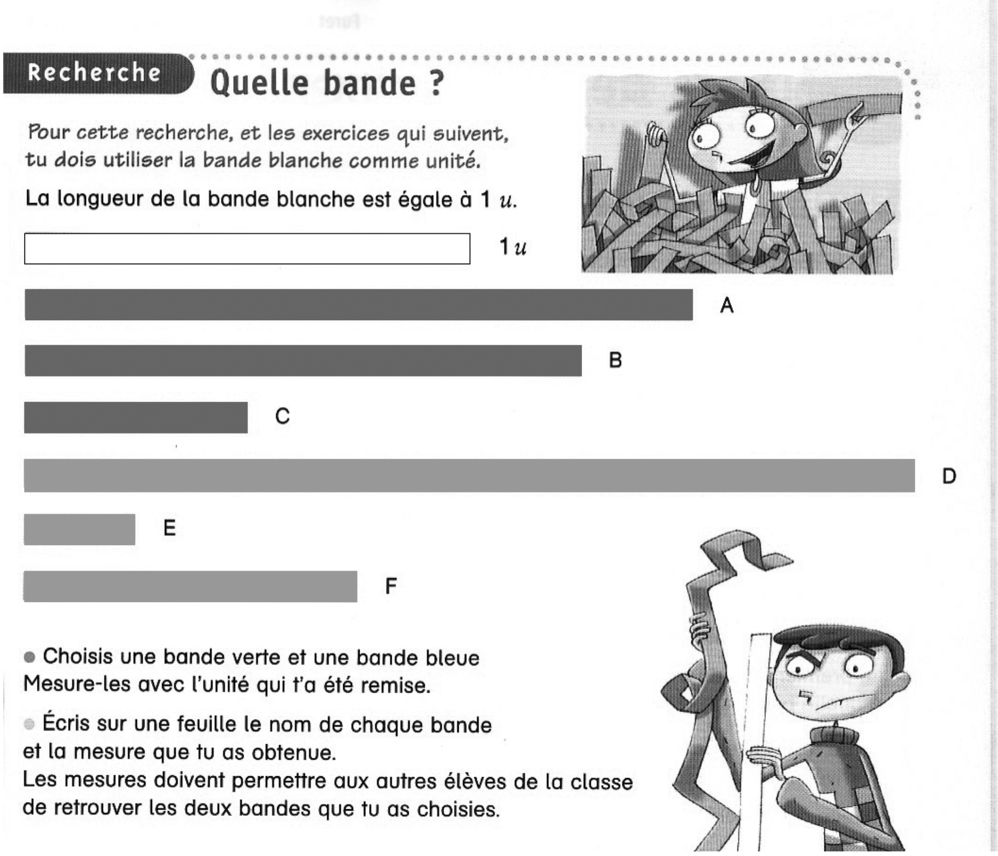
La consigne évoque la situation qui bien sûr est présentée de manière détaillée aux élèves. La bande unité donnée aux élèves

[3] Les textes officiels fournissent depuis peu une information détaillée sur l'enseignement à l'école primaire : une circulaire de 9 pages est sortie en 2004 sur l'articulation cycle 3/6ème, résumant les différentes étapes que devraient avoir franchi les élèves à l'issue du CM2 ainsi que ce qui est attendu de nouveau en 6ème. Dans les programmes de 6ème, appliqués depuis la rentrée 2005, la référence aux notions enseignées en cycle 3 est explicite, destinée à permettre aux professeurs d'aller y voir dans le document d'application, très détaillé,

[4] Consolider : dans la définition du Robert, trois verbes expriment bien ce qui est en jeu : « renforcer, stabiliser, enraciner. »

[5] C'est-à-dire selon les programmes et dans la plupart des manuels récents, ce qui ne veut pas dire que tous les enseignants fassent ainsi.

[6] Manuel Cap-maths CM1 (2003) éditions Hatier, p. 77


**Recherche** **Quelle bande ?**

Pour cette recherche, et les exercices qui suivent, tu dois utiliser la bande blanche comme unité.

La longueur de la bande blanche est égale à 1 *u*.



- Choisis une bande verte et une bande bleue Mesure-les avec l'unité qui t'a été remise.
- Écris sur une feuille le nom de chaque bande et la mesure que tu as obtenue.

Les mesures doivent permettre aux autres élèves de la classe de retrouver les deux bandes que tu as choisies.

est en papier, facilement pliable. Les bandes A, B et C, sont vertes ; les bandes D, E, F sont bleues. Leurs longueurs ont été choisies pour que les bandes puissent effectivement être mesurées en demi ou en quart d'unités :

A l'issue de la séance, après que les élèves ont mis à l'épreuve l'efficacité de leur mesurage[7], plusieurs formes possibles de l'écriture de la longueur d'une bande sont officialisées, par exemple pour A :
$$\mathrm{u}+\frac{1}{2}\,\mathrm{u}\ \text{ou}\ \frac{3}{2}\,\mathrm{u}$$

Une fois cette écriture fractionnaire introduite, les élèves sont conduits à la faire fonctionner, soit pour donner la mesure d'une longueur, soit pour tracer un segment de longueur donnée par une écriture de cette forme. Puis une série de nouveaux problèmes est posée, comme de prévoir le résultat de la comparaison des longueurs de deux segments d'après l'écriture de leurs mesures (faisant intervenir une même division de l'unité), avant de vérifier le résultat par tracé des segments correspondants ; comme de prévoir si une longueur est inférieure ou supérieure à l'unité, ou d'encadrer une longueur fractionnaire comme $\frac{17}{3}\,\mathrm{u}$ entre deux multiples de l'unité successifs. Cette activité conduit les élèves à travailler sur les écritures et non plus sur les segments, et à dégager certaines stratégies, qui ne sont pas formalisées. D'autres supports, comme les aires de surfaces polygonales simples, permettent un réinvestissement de ces connaissances. Ce travail est repris pour des longueurs exprimées par des fractions décimales, et aboutit à l'établissement de relations entre millièmes, centièmes, dixièmes et unités, et à différentes décompositions des fractions décimales :
$$\frac{234}{100}\,\mathrm{u}=2\,\mathrm{u}+\frac{34}{100}\,\mathrm{u}$$
$$=2\,\mathrm{u}+\frac{3}{10}\,\mathrm{u}+\frac{4}{100}\,\mathrm{u}.$$

Parallèlement, le repérage de ces longueurs sur une ligne graduée permet l'abandon du marquage de l'unité, et le passage, un peu forcé, des grandeurs aux nombres, dont l'écriture à virgule est alors enseignée aux élèves.

C'est sur ces connaissances que s'appuient les élèves pour l'élaboration (et /ou la compréhension) de la technique de comparaison des nombres décimaux et pour celle des techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication par un entier), en référence à des opérations sur les grandeurs bien connues des élèves quand leurs mesures sont exprimées par des entiers (par exemple longueur d'une bande constituée par mise bout à bout de deux bandes dont on connaît la longueur). C'est peu à peu, par l'exploration de problèmes divers, portant sur des grandeurs différentes, faisant intervenir des unités différentes, des nombres de tailles différentes, que se constitue pour les élèves, le sens des nombres décimaux, qui à l'issue du CM2, n'est pas encore celui qui est visé en fin de 5$^{\text{ème}}$ puisque,

7 car ils ne communiquent que la mesure, pas le nom de la bande

pour la plupart d'entre eux, comme le montre l'anecdote de l'introduction, si la multiplication par un entier renvoie à du connu, celle par un nombre décimal ne renvoie pas à un savoir déjà formalisé. C'est ce que confirment aussi les difficultés rencontrées par les élèves plus âgés dans les problèmes faisant intervenir la division par un décimal inférieur à 1. C'est peu à peu, aussi, que les connaissances sur les décimaux peuvent être décontextualisées, et que ces derniers vont prendre le statut de nombres, dont on peut approfondir la connaissance indépendamment des situations dans lesquelles on les utilise. L'ensemble de cette démarche nécessite un temps long et certains des résultats de l'évaluation de début de 6ème montrent bien que l'appropriation des décimaux est encore inachevée pour presque 50 % des élèves[8].

La difficulté, pour le professeur de 6ème est double :

- d'une part, un nombre non négligeable d'élèves a déjà des connaissances qui peuvent faire illusion, si le professeur du CM2 a privilégié le travail sur la description des écritures (repérage du chiffre des dixièmes, recours permanent au tableau de numération, etc) et les algorithmes de calcul, au détriment de celui sur le sens ;
- d'autre part, le professeur n'a aucun moyen a priori, de savoir où en sont ses différents élèves, dans leur cheminement vers l'appropriation des nombres décimaux, puisque par la position institutionnelle de la classe de 6ème, il ne connaît pas la progression ni les situations utilisées au CM1 et au CM2. Il peut avoir une idée, par l'examen des évaluations de 6ème ou d'autres tests, de « ce qui reste » des savoirs enseignés mais pas des connaissances intermédiaires, pas encore assurées, que l'élève a pu se forger, mais qui ne se traduisent pas par une maîtrise des épreuves « normalisées »[9].

La question principale, à laquelle il est répondu différemment suivant les manuels de 2005, est alors : faut-il ou non, revenir avec les élèves sur la signification de l'écriture à virgule, en terme de fraction décimale, et même introduire une ou plusieurs situations qui puisse les renvoyer à la propriété qui, pour eux, a justifié le sens de ces fractions, c'est-à-dire *par exemple*, le fait que grâce aux écritures fractionnaire ou à virgule, on peut communiquer la mesure d'un segment de longueur comprise entre deux entiers. La réponse à la question dépend, bien sûr, du niveau de la classe.

Pour quelques-unes, il est sans doute possible de suivre la voie de certains manuels qui, en dépit des instructions, n'hésitent pas à faire porter tout le travail concernant les décimaux sur les algorithmes, en formulant des règles uniquement en terme d'actions sur les écritures (par exemple, pour multiplier par 100, on déplace la virgule de 2 crans à droite), sans revenir aux raisons qui justifient ces règles.

Pour la majorité des autres classes, par contre, je crois qu'il est très utile, tant pour le professeur que pour les élèves, que ceux-ci soient confrontés à des problèmes comme le suivant :

> *Le professeur distribue à chaque élève une unité (une bande de papier quadrillé à petits carreaux (20 petits carreaux )) et une autre bande, unie, dans laquelle il leur demande de découper un morceau long de 2,35 unités. Il dit : « moi, j'ai fait un modèle ; quand vous aurez fini, nous comparerons vos bandes et la mienne. Ceux qui auront réussi nous expliqueront comment ils ont fait et pourquoi, et on essaiera de comprendre ensemble d'où viennent les erreurs de ceux qui auront fait une bande de longueurs différentes. »*

On pourrait croire que puisque les élèves de 6ème savent utiliser un mètre déroulant pour mesurer une longueur de 2,35 m, l'activité ci-dessus devrait leur paraître facile. Mais cela n'est vrai que pour ceux qui pensent à reconstruire, avec l'unité qui leur est fournie, les longueurs correspondant à 1/10 et à 5/100 d'unité.

[8] L'évaluation 2005 est riche en informations car elle comporte de nombreux items sur les décimaux.

[9] Ainsi, le professeur de Claire, dans la situation scolaire ordinaire, a peu de chances de s'apercevoir qu'elle et certainement d'autres élèves, disposent de connaissances qui pourraient lui servir de points d'appui pour la présentation d'un des sens de la multiplication des nombres décimaux

C'est en s'appuyant sur l'analyse des productions effectives des élèves que peuvent être rappelés le partage de l'unité en dixièmes, puis en dixièmes de dixième, l'écriture sous forme fractionnaire du nombre 2,35, la recherche de l'écriture de la longueur en centièmes, etc. Suivant les difficultés rencontrées par les élèves, le professeur peut y passer plus ou moins de temps, faire refaire ou non le même travail avec d'autres données, poursuivre par le repérage de points sur l'axe gradué, faire redécouvrir les relations comme :

$$10\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\text{ ou }\frac{1}{10}=\frac{10}{100}\text{, etc.}$$

L'objectif est qu'il puisse disposer de quelques situations de référence, sur lesquelles, avec la classe ou seulement avec certains élèves, il puisse revenir, dans des cas délicats.
Prenons l'exercice classique suivant : « supprime les zéros inutiles du nombre 50,080 ». Il suffit à certains des élèves qui suppriment le zéro des dixièmes de décomposer le nombre en fractions décimales pour s'apercevoir de leur erreur, mais d'autres ont besoin d'aller jusqu'à placer 50,8 et 50,08 sur un axe gradué pour se rendre compte qu'il ne s'agit pas du même nombre. Si le travail évoqué précédemment n'a pas été fait, le professeur ne peut que rappeler les règles en s'appuyant sur le tableau de numération et le vocabulaire : dixième, centième, etc, alors que certains élèves ont encore besoin de confronter leurs prévisions et le résultat de leurs actions sur ces quantités pour que les notions correspondantes puissent être convenablement « enracinées ».
D'autres situations, en lien par exemple avec la représentation de données sur un axe gradué, peuvent permettre ce retour sur ce qui a été travaillé l'année précédente et servir de point d'appui pour les apprentissages ultérieurs.
Cette question de « comment reprendre un enseignement sur une notion largement travaillée à l'école primaire ? » est particulièrement délicate quand ce travail a déjà abouti à l'élaboration d'algorithmes ou à l'établissement de formules comme pour les mesures d'aires et de périmètres, certains enseignants de CM2 anticipant les apprentissages de 6$^{ème}$. Plutôt qu'à des séances de révision formelle, le recours à quelques situations où les élèves ont à s'interroger sur le sens des notions en jeu est plus à même de favoriser la transition.

## II) Enrichir les acquis de l'école primaire

Le terme « enrichir » renvoie, il me semble, aux enseignements concernant des notions, qui ne sont pas nouvelles, mais dont certains aspects n'ont pas été travaillés à l'école primaire. C'est le cas du calcul de l'aire de rectangles dont les dimensions sont décimales, de la multiplication des décimaux, de la notion de quotient de deux entiers, de la division décimale, de la notion de volume, par exemple. C'est aussi le cas d'une partie du programme de géométrie, qui sera abordé dans le prochain article.
Comment introduire le nouveau ? Là aussi, la question du sens se pose : si le produit de deux décimaux a été repoussé du CM2 à la sixième depuis 1996, ce n'est pas à cause de la difficulté de la technique opératoire, mais à cause de la construction du sens de l'opération, comme en témoigne l'anecdote de l'introduction. Il en est de même pour le calcul de l'aire d'un rectangle de dimensions décimales, qui peut constituer un vrai « problème de recherche » pour les élèves de 6$^{ème}$ : prenons l'exemple d'un rectangle de 5,3 cm sur 6,8 cm : le travail de découpage du rectangle suivant les parties entières et décimales, puis du calcul de l'aire du morceau rectangulaire de dimensions inférieures à 1, exprimée en cm$^2$, c'est-à-dire avec une unité plus grande que la surface à mesurer, pose des difficultés importantes aux élèves. Leur dépassement enrichit la compréhension qu'ils peuvent développer du concept d'aire et de son expression sous forme de

mesure-produit[10]. La confrontation à ce problème peut être aussi un moyen pour initier un travail sur le sens du produit de deux décimaux.

Le travail sur le volume peut sembler plus nouveau puisque le terme même n'est pas cité dans le programme du cycle 3, où est abordée la notion de « contenance », en relation avec les unités usuelles : le litre et ses dérivés, qui interviennent dans les problèmes « de la vie courante ». Au cycle 3, la résolution de ce genre de problèmes est précédée d'activités faisant intervenir des récipients, du liquide ou du sable, ayant pour but d'aider les élèves à construire la notion de « contenance », à comprendre comment on peut mesurer une contenance à l'aide d'une unité, par transvasements successifs du liquide contenu dans le récipient, à se représenter le litre comme la contenance d'un cube creux dont l'arête intérieure mesure 10 cm, à construire quelques ordres de grandeurs pour la suite mL, cL, dL, L, daL, etc.

Le passage du terme de « contenance » ou de « capacité » à celui de « volume », n'est pas facile, pour plusieurs raisons :

- la complexité du langage courant. Pour les élèves de 6ème, ce mot renvoie sûrement tout autant au volume de la télé qu'à celui de l'eau contenue dans la bassine, si ce n'est aux deux volumes de leur encyclopédie. Un travail sur ce mot est donc nécessaire.
- une fois ces trois significations distinguées, il s'agit d'aider les élèves à comprendre les liens entre une contenance, concept utilisé pour mesurer une quantité de fluide, et un volume, concept utilisé pour mesurer une « quantité d'espace » occupée par un corps. Des recherches[11] ont montré les difficultés que rencontraient les élèves pour conceptualiser la notion de volume d'un objet plein, pour différencier aire latérale et volume. De plus, quand on parle d'objets réels, cela se complique encore : quand je parle du volume d'une casserole, est-ce de sa contenance ou de tout l'espace qu'elle occupe, une fois pleine, ou de l'espace occupé par le matériau qui la constitue (y compris le manche) ?
- enfin, la contenance est une grandeur unidimensionnelle, avec un système d'unités qui fonctionne comme celui des longueurs, alors que le volume est une grandeur tridimensionnelle, avec des unités exprimées à l'aide des unités de longueur, mais dont le fonctionnement est bien différent, d'où la difficulté des conversions.

Le travail d'appropriation n'est qu'amorcé en sixième, sur le cas bien particulier du parallélépipède rectangle, pour lequel il est possible de relier la conception en terme de contenance à celle de quantité d'espace mesurée à l'aide d'unités « cubes ». Certains manuels ont recours à l'évocation d'un aquarium[12], que l'on peut remplir d'eau mais aussi de cubes-unités, semblant faciles à dénombrer, ce qui fournit la formule du volume, comme le montrent les dessins en perspective des manuels. Or les élèves de 6ème, même en fin d'année scolaire, ont besoin d'être confrontés à des problèmes mettant en jeu l'espace et ses trois dimensions. Un matériel bon marché est disponible dans ce cas : une boîte de sucre en morceaux. Le professeur apporte une boîte incomplète, les élèves observent le pavage : sur la longueur de la boîte, il y a 15 sucres, sur la largeur 3, sur la hauteur 3 aussi. Les élèves doivent prévoir combien il y a de sucres quand la boîte est pleine. La question a l'air très facile… Essayez avec vos sixièmes : vous verrez que l'idée de découper en couches et de dénombrer les sucres de chaque couche à l'aide d'un produit n'est pas si évidente, ce qui explique peut-être que la formule s'oublie si vite…

La suite de cet article paraîtra dans PLOT n° 14

[10] Voici ce qu'écrivait en 1992, les auteurs d'EVAPM 3-4 : « le concept de volume est loin d'être maîtrisé par les élèves de troisième et c'est bien la raison pour laquelle il ne faut pas négliger cet apprentissage (longueurs, aires, volumes, au long des 4 années de collège, sans le réduire à des applications de formules. ». Je ne sais pas si la situation s'est améliorée depuis !

[12] Pour d'autres, la question contenance-volume est totalement ignorée.

[11] Le numéro 4.1 (1983) de la revue Recherches en didactique des mathématiques est consacré à ce thème.