Le livre II d'Euclide

Henry Plane

D'aucuns voient dans ce livre le point de départ de l'algèbre. C'est peut-être aller vite en besogne. C'est oublier l'œuvre des Arabes et des Persans des IXème et Xème siècles et leurs apports majeurs. C'est négliger le grand problème : retrancher le plus grand du plus petit, et bien d'autres.

Pour se former un jugement, reportons-nous aux textes. Le livre II des « Eléments d'Euclide » comporte 14 propositions.

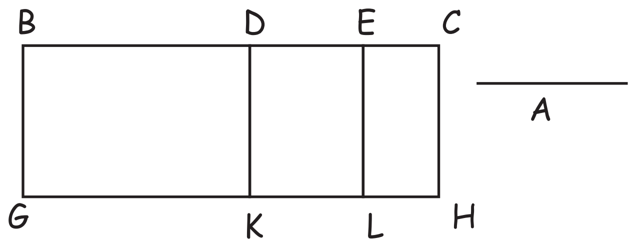
Proposition I

Abordons cette première proposition telle qu'elle est traduite en français par PEYRARD (Edition 1804).

« *Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris entre ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée, et sous chacun des segments de l'autre.* »

Précisons, à propos de droite, que ce n'est qu'au cours du dix-neuvième siècle que seront distingués le segment de droite AB et la ligne droite AB qui, elle-même, deviendra la droite AB. Les traducteurs d'EUCLIDE ont donc conservé l'ancienne dénomination. Ainsi, lorsqu'une « droite » est partagée, on obtient « nos » segments de droite.

Quant aux rectangles, il s'agit des surfaces formées à partir des segments considérés et des relations entre les aires de celles-ci.



Reportons-nous à la figure ci-dessus.

Les « droites » sont A et BC.

BC est partagée par D et E.

Les rectangles sont construits avec BG = DK = EL = CH = A.

Le rectangle BGHC est égal à la somme des rectangles BGKD, DKLE, ELHC - somme des aires cela s'entend.

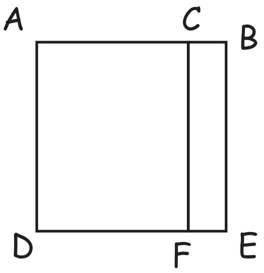
On pense certes, que si $a = x + y + z$ alors $ab = xb + yb + zb$ mais il ne s'agit ici que de segments de droites et de leur longueur. Bien sûr, on trouve très tôt chez les commentateurs :

« *Ces théorèmes se peuvent aussi démontrer par les nombres.* »
P. LEMARDELE -1623.

Par ailleurs, dès 1575, COMMANDIN ajoutait :

« *S'il y a deux lignes droictes et que toutes deux soient couppées, en tant de parties que l'on voudra : le rectangle contenu sous icelles deux lignes droictes, est égal aux rectangles contenus sous chacune partie de l'une appliquée à chacune partie de l'autre.* »

Proposition II

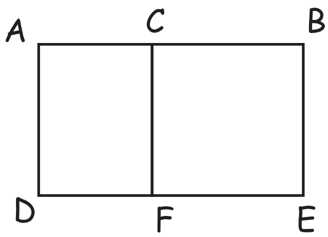


« *Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous l'un et l'autre segment, est égal au quarré de la droite entière.* »

(ABED) = (ACFD) + (CBEF)
avec AD = AB
On y voit :
si $a = x + y$ alors $ax + ay = aa$

Proposition III

« *Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et l'un des segments, est égal au rectangle compris sous les segments et au quarré formé sous le segment premièrement pris.* »



Toujours avec la figure :

ici avec BE = CB.
Et encore
(ABED) = (ACFD) + (CBEF)

Mais, avec $a = x + y$,
on y voit $ay = xy + yy$
(y^2 à la place de yy est une autre histoire…)

Quels résultats concernent les autres propositions ? Examinons-les, retraduites ici avec notre symbolisme actuel.

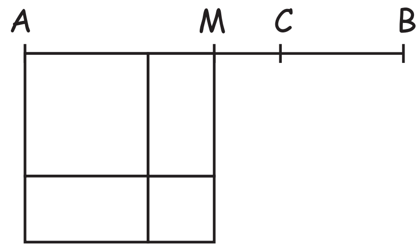
Proposition IV

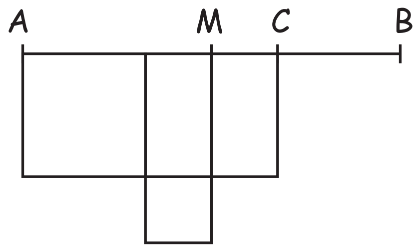
Si AB = AC + CB
alors $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\ AC.CB$

Proposition V

Toujours avec AB = AC + CB mais, de plus, avec M milieu de AB,

$AC\ .\ CB + MC^2 = AM^2$





Avec nos outils :
AB = 2AM = $2a$ et MC = x, avec $x < a$

$(a + x)(a - x) + x^2 = a^2$

Proposition VI

C est sur le prolongement de AB

$BC^2 + AB.BC + AM^2 = MC^2$

Les propositions VII à IX travaillent encore sur la figure de la cinquième proposition. On trouve :

Proposition VII

$AB^2 + AC^2 = 2\ AB.AC + CB^2$

Proposition VIII

$4\ AB.AC + CB^2 = (AB + AC)^2$

Proposition IX

$AC^2 + CB^2 = 2(AM^2 + MC^2)$

On peut certes y lire :

$x^2 + y^2 = 2\big([(x + y)/2]^2 + [(x - y)/2]^2\big)$

Mais, par la suite, il s'agira d'un triangle ACB de médiane CM…

Proposition X

Vous avez compris le principe ?

Alors, « traduisez » le texte de cette dixième proposition :

« *Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute une droite qui ait même direction, le quarré d'une droite composée de la ligne droite entière et de la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, sont doubles du quarré de la moitié de cette ligne droite et du quarré d'une droite composée de la moitié de cette ligne droite et de la droite ajoutée, comme ne faisant qu'une seule droite*. »

Proposition XI

Il s'agit du partage d'un segment en « moyenne et extrême raison », c'est-à-dire de la détermination d'un point M sur AB tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{BM}{AM}$.

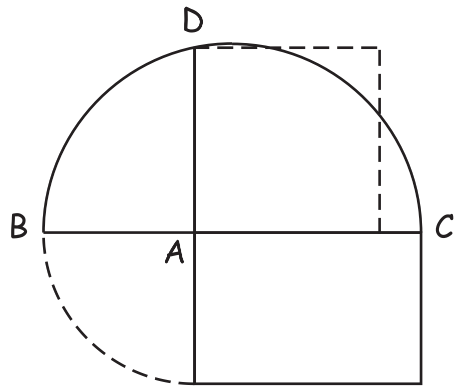
Propositions XII et XIII

Il s'agit d'un triangle, de la relation entre le carré d'un côté, la somme des carrés de deux autres et le produit d'un de ces derniers avec la projection orthogonale de l'autre sur lui. Bien entendu l'expression en est autre. Il y a deux cas : angle aigu (acutangle) et angle obtus.

Proposition XIV

Construction d'un carré égal à un rectangle donné. Celle-ci s'appuie sur la proposition V.

$AD^2 = AB . AC$



Conclusion

Pour moult commentaires on se reportera à l'édition des « Eléments d'Euclide » par B.VITRAC aux P.U.F. (1990 - 1994). A ce jour, c'est, en français, la plus complète et la plus critique.

Enfin, pour ceux qui se sont pris au jeu…

La **proposition X** pourrait se « traduire » ainsi :

AM = x

AB = $2x$ (c'est la « droite entière »)

BC = y (c'est la « droite ajoutée »)

Et la proposition affirmée est :

$(2x + y)^2 + y^2 = 2[x^2 + (x + y)^2]$