A la manière de…

Henry Plane

Il paraît parfois difficile de comprendre pourquoi l'idée de raisonner sur des grandeurs inconnues comme sur des grandeurs connues, ce qui est la grande nouveauté de la fin du Moyen-Âge, n'a pas eu une réussite plus fulgurante à la Renaissance. Pourquoi les « cossistes » utilisateurs de l'« Algebra » et du « Muquabala » d'Al Khawarismi et de ses successeurs arabes ne s'en sont-ils pas mieux sortis pour justifier et expliquer leurs démarches ? C'est oublier qu'on ne disposait pas de ces outils qui nous sont familiers : signes, symboles, expressions.

A la fin du XVI^e siècle,

$$(x-3)(x^2+3x-2)=x^3-11x+6$$

s'écrit :

LM3 in QP3LM2 multiplicatum
producit CM11LP6.

Il faudra attendre le milieu du XVII^e siècle pour que même le signe = s'impose…

D'autre part, une grandeur n'a de réalité que pensée comme ligne, surface ou volume, d'où, sans cesse, le recours justificatif à la géométrie ou, au moins, aux résultats consignés chez Euclide.

Dans les lignes qui suivent, on a cherché à rendre compte de cette situation à travers la résolution d'une équation du deuxième degré ou, plutôt, la recherche d'une grandeur, d'un côté, d'une « chose » (*res* ou *coss*) définie par une relation entre son carré (*censusi* ou *quadratus*) et elle-même. On s'est largement inspiré d'un traité important paru en 1577, à Paris, en latin :

Du grand art du caennais Guillaume GOSSELIN ou de la part cachée des nombres vulgairement appelée algèbre et « almucabala. »

On a cherché à éviter tout ce qui serait néologisme. Concession, néanmoins, au lieu de P et M, on usera de + et −. Gosselin emploie √ pour noter une racine carrée, **la** racine carrée car il n'y avait alors que des grandeurs au-dessus de rien…

Comme notre auteur, nous utiliserons la première personne du singulier.

En général, les nombres connus figurent sous forme numérique. Ce sont des échantillons nombreux qui assurent le raisonnement. Cela s'appellera par la suite, démonstration en nombre. Dans un premier temps, nous respecterons cette façon de faire. Pour ne pas allonger cet essai, nous figurerons par des lettres minuscules les nombres connus ou calculés à partir d'eux.

Toutes ces précautions prises, nous proposons une « lecture modernisée » en rapport avec notre affaire.

De l'équation

Je suppose d'abord que connaissant le carré Q je sais trouver le côté L – table de carrés et procédés de calcul déjà étudiés –.

Par Euclide, je sais que si deux grandeurs se valent, en les divisant par une même les restes se valent aussi.

Si 4Q valent 36 alors Q vaut 9 et L : 3. Et de même si 7Q valent 14, Q vaut 2 et L : √2. Et encore lorsque 5Q vaut 3, Q vaut $\frac{3}{5}$ et L vaut $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Je sais aussi que, si Q équivaut à 40L, alors L vaut 40 car je sais comparer les degrés de la chose entre eux. Si 3Q équivaut à 10 L, L vaudra $\frac{10}{3}$.

Si nous considérons maintenant les relations entre carré, côté et grandeur connue, il y en a trois possibles :

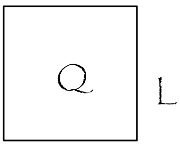
- Un carré et son côté valent une grandeur.

  Q + pL doivent égaler q.
- Un carré vaut le côté et une grandeur

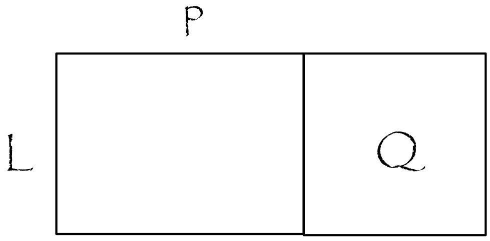
  Q doit égaler pL + q.
- Un carré et une grandeur valent le côté.

  Q + q doivent égaler pL.

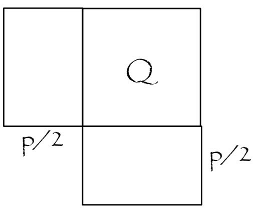
Premier problème



Trouver L tel que Q + pL égale q.
Si je connaissais L, je pourrais construire son carré Q, auquel j'adjoindrais le rectangle p.L et ainsi j'aurais une figure qui vaudrait q.

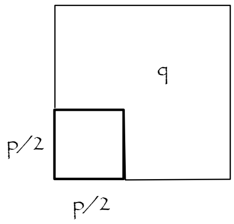


Mais je peux agir autrement.



J'adjoins sur deux côtés de Q des rectangles $\frac{p}{2}$.L. L'ensemble vaut toujours q.
Je constate alors qu'en complétant par un carré de côté p/2, j'obtiens un autre carré dont le côté n'est autre que $L + \frac{p}{2}$.

Donc carré de $L + \frac{p}{2}$ vaut la somme de q et du carré de p/2. Soit d cette somme que je connais alors.



Carré de $L + \frac{p}{2}$ vaut d. $L + \frac{p}{2}$ vaut √d. La valeur de L est l'excès de √d sur p/2.

Deuxième problème

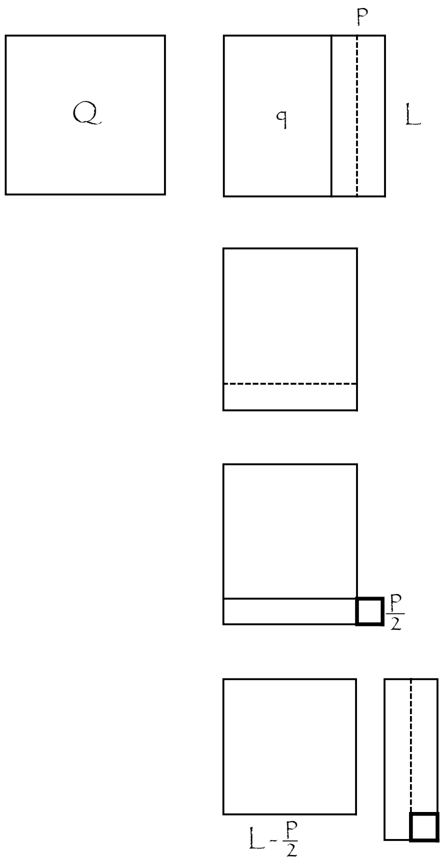
Trouver L tel que Q égale pL + q.
Dans le carré Q il me faut placer le rectangle pL et q.

En m'inspirant du problème précédent je puis, sur un côté, retirer un rectangle $\frac{p}{2}$.L, mais je ne puis plus alors le faire sur un côté consécutif du carré.

Toutefois, si j'adjoins à la figure restante le carré de p/2, je retrouve un rectangle $\frac{p}{2}$.L qui, une fois soustrait, me laisse le carré de $L - \frac{p}{2}$.

Donc si à Q, c'est-à-dire q + pL j'ajoute le carré de p/2, j'obtiens deux fois $\frac{p}{2}$.L et le carré de $L - \frac{p}{2}$.

et si de ces deux sommes je retire pL, j'ai l'égalité entre la somme de q et du carré de p/2 soit d que je calcule, et le carré de $L - \frac{p}{2}$.
Alors $L - \frac{p}{2}$ vaut √d et L est la somme de √d et de p/2.



Troisième problème

Trouver L tel que Q + q égale pL.

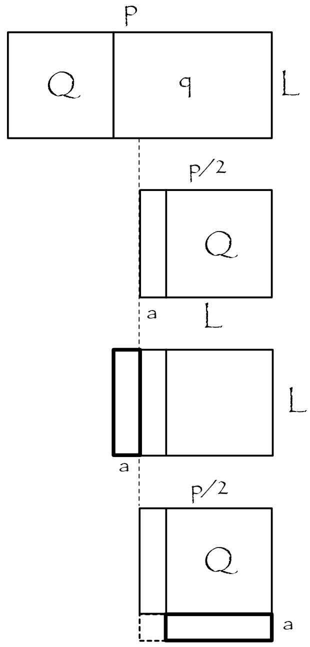
Supposons d'abord L plus petit que p/2.

Donc je sais par Euclide que Q produit de L par lui-même est plus petit que le produit de p/2 par L et par suite que q est plus grand que $\frac{p}{2}$.L puisque la somme de Q et q est pL. Je trouve alors dans le rectangle $\frac{p}{2}$.L le carré Q et un excès aL (a est l'excès de p/2 sur L).

Je constate alors que q contient Q et deux rectangles aL. Si j'adjoins ces deux derniers en gnomon à Q, je vois qu'il ne me reste qu'à ajouter le carré de a pour obtenir celui de p/2.

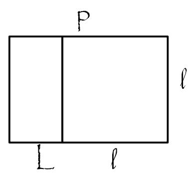
Donc la somme de q et du carré de a vaut le carré de p/2. Le carré de a est donc l'excès du carré de p/2 sur q, soit d.

a vaut $\sqrt{d}$ et, par suite, L vaut $\frac{p}{2} - \sqrt{d}$.



Je retiens en outre que q vaut le rectangle de $\frac{p}{2}+a$ par L. Si j'appelle ℓ la somme $\frac{p}{2}+a$, j'ai donc ℓ.L vaut q. Eh bien, ℓ est aussi valeur de la chose satisfaisant au problème !

Je sais que ℓ + L équivaut à p. Si dans le rectangle pl je figure le carré de ℓ, il reste le rectangle de ℓ et L, c'est-à-dire q. J'ai donc bien carré de ℓ plus q équivaut à q ℓ.



Il existe dans ce problème deux valeurs pour la chose :

- l'une inférieure à p/2, savoir $\frac{p}{2} - \sqrt{d}$,
- l'autre supérieure à p/2, savoir $\frac{p}{2} + \sqrt{d}$.