Des pyramides aux racines carrées

Jean Fromentin

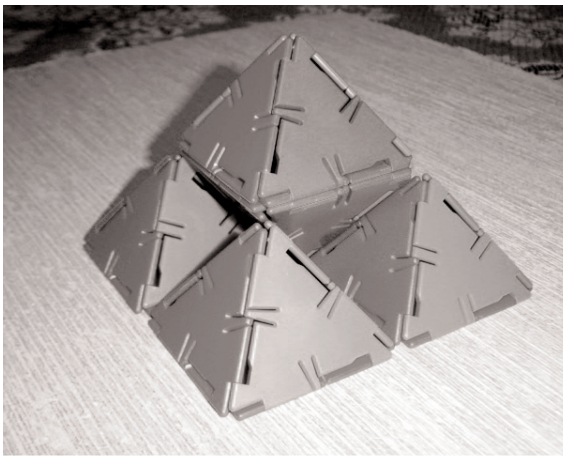
L'article « Semblable à soi-même » de François Drouin sur les « rep-tuiles » dans le n°6 de PLOT m'a fait penser à vous faire part d'une activité qui m'a moi-même surpris sur ce fichu théorème que j'intitule habituellement « k, k^2, k^3 ». Comme beaucoup d'entre vous, j'ai tout essayé pour le faire découvrir, accepter et utiliser par mes élèves de troisième. L'activité que je raconte ici fait partie de ces essais.

Ayant fait acheter à mon collège le matériel « Polydron », matériel comprenant entre autres des pièces planes emboîtables en forme de triangles isocèles, rectangles - isocèles et équilatéraux, de rectangles et de carrés, pièces qui permettent ainsi de réaliser de nombreux solides, je me suis lancé avec mes élèves dans l'activité basique qui consiste à construire des cubes (un par table) avec ce matériel et à réaliser sur le bureau, à l'aide des cubes des élèves, un cube de dimensions doubles. Tous étaient d'accord pour admettre qu'il fallait huit cubes pour le réaliser : 4 pour une première couche (2^2) et encore 4 pour une deuxième couche ($2 \times 2^2 = 2^3$). Ne pouvant construire davantage de cubes avec le matériel en ma possession, je suis allé chercher des cubes pleins emboîtables pour réaliser un cube de dimensions trois. La classe a pu observer qu'il fallait 27 petits cubes, c'est-à-dire 3^3.

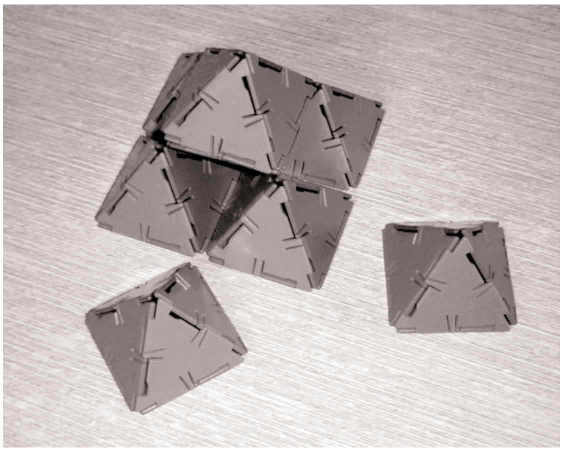
L'activité s'est prolongée avec la construction, à chaque table, d'un parallélépipède rectangle (quatre pièces rectangulaires et deux carrées) : regroupement de tous les parallélépipèdes sur le bureau pour réaliser le parallélépipède de dimensions doubles et mêmes conclusions que pour le cube.

Le « clou » de l'activité arrivait enfin avec la construction, à chaque table, d'une pyramide à base carrée avec des triangles équilatéraux comme faces latérales. Cette pyramide ne pavant pas l'espace, on ne pourrait pas faire les mêmes constatations qu'avec le cube et le parallélépipède. Pour se convaincre alors du théorème, et donc le démontrer, il faudrait procéder à un calcul littéral, ce qui était, pour moi, l'aboutissement de cette activité.

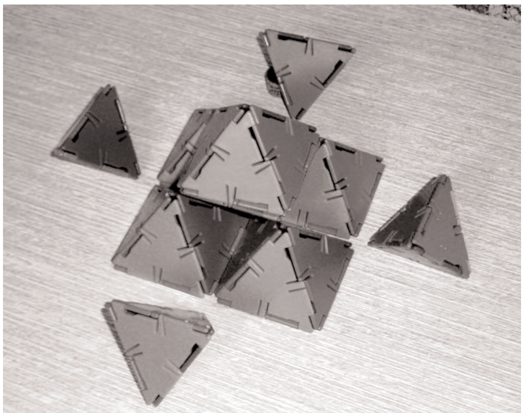
Comme précédemment on regroupe les pyramides et deux élèves, au bureau, essaient de les disposer pour réaliser une pyramide de dimensions doubles. Je dois avouer que je n'avais pas pris la peine auparavant de faire moi-même la construction sachant qu'elle était impossible. Les élèves placent quatre pyramides pour réaliser la base de la grande pyramide, constatent qu'ils peuvent en loger deux autres. Et là, surprise : les six pyramides étant placées, je découvre que les trous qui restent à combler sont des tétraèdres.



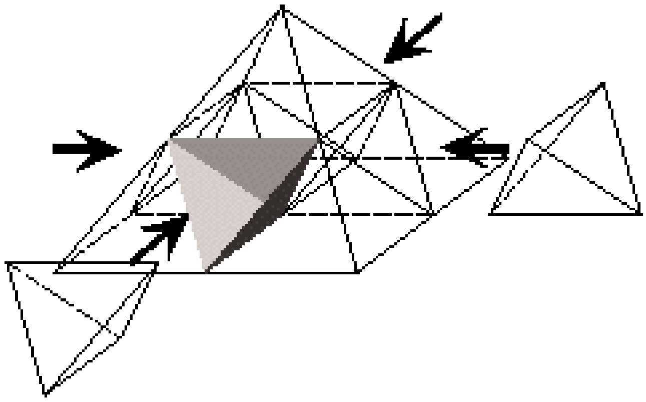
Fort de cette découverte, je demande aux élèves restés à leurs tables de s'approcher du bureau et d'observer la construction. Ils



constatent que les deux pyramides à base carrée restantes ne peuvent pas combler les trous. Quels solides pourraient convenir ? Ne pourrait-on pas les construire ? Je donne des pièces triangulaires et, naturellement, les élèves les plus actifs qui étaient les plus près de la table construisent quatre pyramides à base triangulaire qu'ils logent dans les trous.

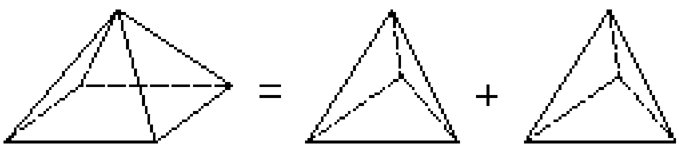


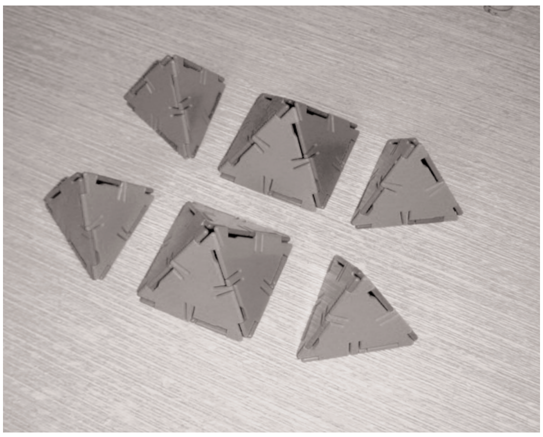
Mais alors, puisqu'il fallait théoriquement huit pyramides à base carrée pour réaliser la pyramide de dimensions doubles et que six seulement ont été utilisées, les deux pyramides restantes ont donc le même volume que les quatre tétraèdres, ou encore : une pyramide à base carrée a un volume double de la pyramide à base triangulaire (les faces latérales des deux pyramides étant les triangles équilatéraux).
La conjecture était forte. Il restait à la démontrer. Nous avions déjà fait le calcul sur les racines carrées. L'idée de donner à



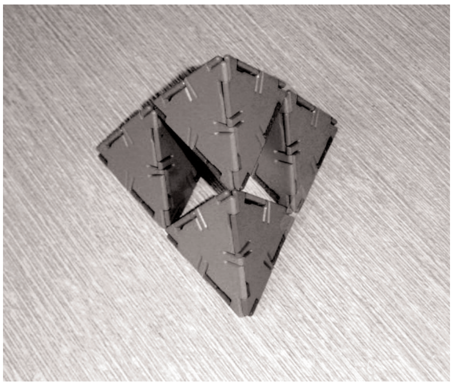
faire la démonstration en devoir à la maison a tout de suite germé dans mon esprit. Mais la sonnerie allait retentir sans que nous ayons fait le calcul littéral prévu ! Je ne me souviens plus quel travail je leur ai donné pour le lendemain (j'ai dû choisir très vite un exercice du livre), mais je leur ai promis que nous reviendrions sur cette pyramide.

Dès que j'ai pu, j'ai fait la démonstration (un bon calcul sur les racines carrées !) et j'ai dressé les grandes lignes du devoir à la maison que vous trouverez en annexe.
Mais une autre idée m'est venue : si je reprenais l'activité à partir de tétraèdres ? Je sors le matériel, construis les huit tétraèdres et essaie de les disposer pour réaliser

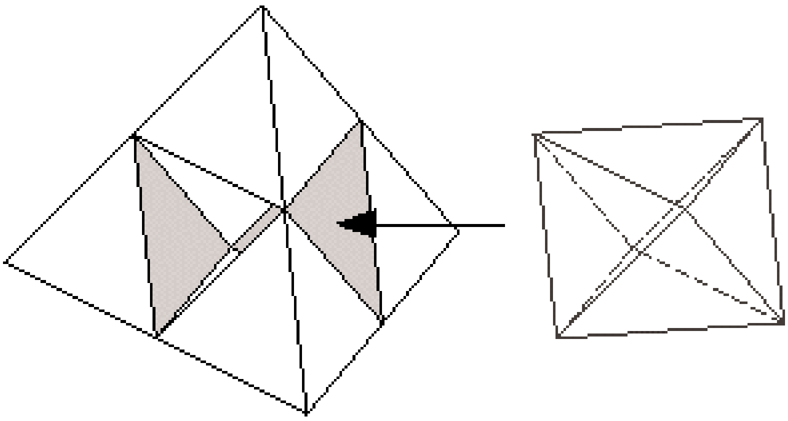




un tétraèdre de dimensions doubles. J'en dispose trois pour faire la base du grand tétraèdre, j'en tiens un quatrième au sommet et il reste un trou qui, oh surprise !, a la forme d'un octaèdre, c'est-à-dire qui peut être comblé par deux pyramides à bases carrées. Deux situations duales ! Elles ne sont pas belles les mathématiques ?



Le lendemain, je distribue le matériel « Polydron » et la classe se lance cette fois dans la construction des tétraèdres pour aboutir à la même



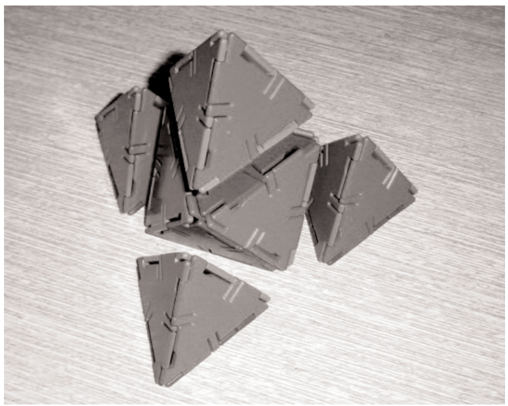
conjecture au niveau des volumes des pyramides. Je ne peux qu'inviter les élèves à s'émerveiller d'une telle situation. Je fais alors le calcul littéral que je n'avais pu faire la veille en prenant comme support la pyramide à base carrée pour montrer que si les dimensions sont multipliées par k, les volumes sont multipliés par k^3, et je distribue la feuille du devoir à la maison qui aura servi en même temps de mémoire de cette activité.

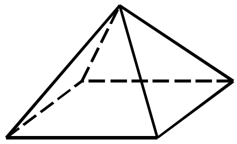
Cette activité conduite de la sorte avec son lot d'imprévus montre un aspect de ce que pourraient être les laboratoires de mathématiques imaginés par l'APMEP dans les années 80 et relancés actuellement par la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques). Pour cela, il faudrait :

- Du matériel (pas uniquement informatique) permettant des recherches, des expérimentations débouchant sur des conjectures et des démonstrations.
- Du temps pour pouvoir faire ces recherches, ces expérimentations, pour en institutionnaliser les conclusions et pour rendre ces dernières opérationnelles.

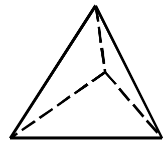
J'ajouterais bien une troisième condition pour faire vivre les laboratoires de mathématiques : une société qui ne dénigre pas l'école et les mathématiques, et, en conséquence, des élèves curieux, ayant envie d'apprendre et sachant s'émerveiller, même sur des résultats mathématiques.

Allez, rêvons !

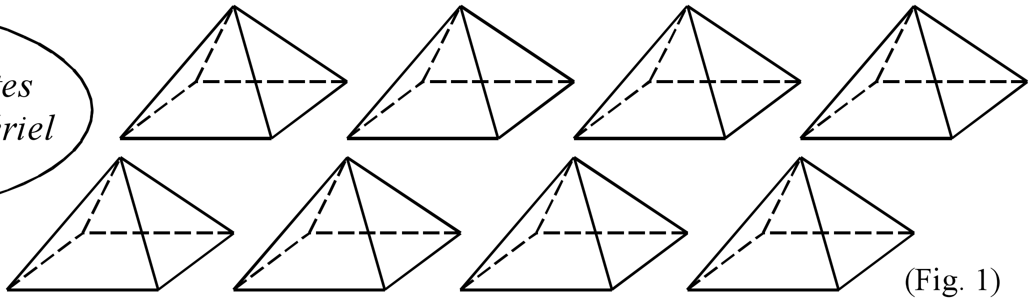




A propos de pyramides



Rappel des observations faites en classe avec le matériel POLYDRON



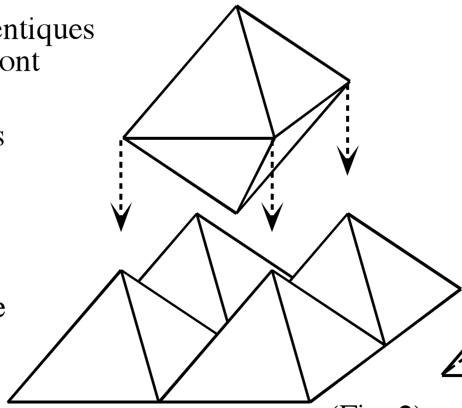
(Fig. 1)

Nous disposons de huit pyramides identiques à base carrée dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. (Fig. 1)

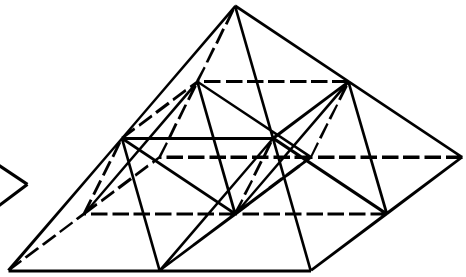
Le volume total de ces huit pyramides est donc égal au volume d'une pyramide de dimensions doubles.

$$8 = 2^3$$

Si on essaie de construire cette grande pyramide avec les huit petites, on observe qu'on peut en placer seulement six. (Fig. 2 et 3)



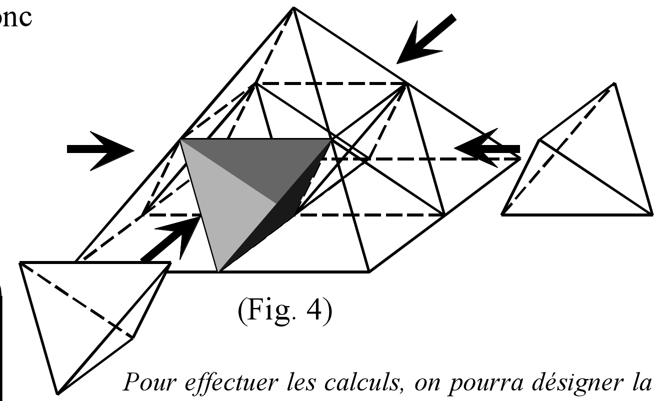
(Fig. 2)



(Fig. 3)

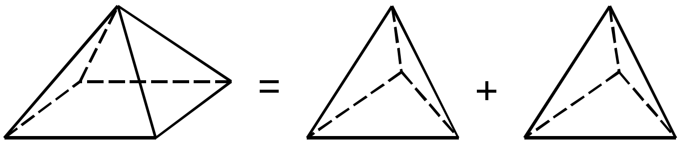
Le volume des deux pyramides restantes correspond donc au volume des quatre trous laissés dans la construction.

Or chacun de ces quatre trous pourrait être comblé par une pyramide à base triangulaire dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. (Fig. 4)
(On appelle une telle pyramide : un tétraèdre.)



(Fig. 4)

Il apparaît donc que le volume de la pyramide à base carrée est le double du volume du tétraèdre.



Le démontrer par le calcul.

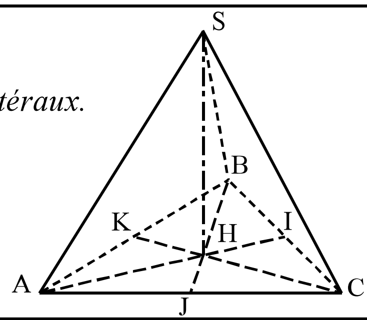
Pour effectuer les calculs, on pourra désigner la longueur des arêtes par la lettre "a", ou bien choisir 12 cm pour cette longueur.
Dans les deux cas on fera les calculs en valeurs exactes.

Renseignements :

SABC est un tétraèdre régulier : ses quatre faces sont des triangles équilatéraux.

Dans le triangle ABC considéré comme base de la pyramide de sommet S, le point de concours H des médianes est situé au tiers des médianes à partir des côtés (ou aux deux tiers des médianes à partir des sommets).

H est le pied de la hauteur du tétraèdre associée à la face ABC.



Collège François Rabelais. Niort.