Les fiches cuisine de Tonton Lulu : comment réussir le triangle quelconque !...

Jacques Lubczanski

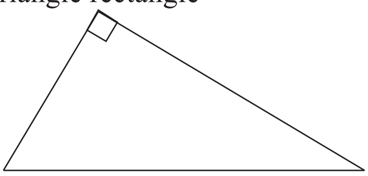
Cet article est paru dans le Bulletin vert n° 347

N.D.L.R. : Jacques Lubczanski, comme il le dit plus loin, s'intéresse aux triangles acutangles. C'est pourquoi il rejette ce pauvre triangle pourtant bien quelconque avec son angle obtus.

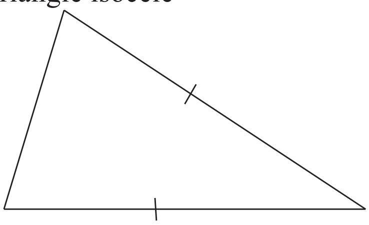
C'est banal et pourtant vrai : les plats les plus courants, les plus communs, sont souvent les plus difficiles à réussir parfaitement.

Il en va ainsi du triangle quelconque, qui, pour être présent dans presque toutes les préparations géométriques, n'en est pas moins délicat à réaliser: il y a d'ailleurs trois façons typiques de rater un triangle quelconque, que sans doute, chacun d'entre nous a déjà rencontré.

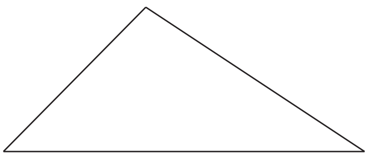
- le triangle rectangle



- le triangle isocèle



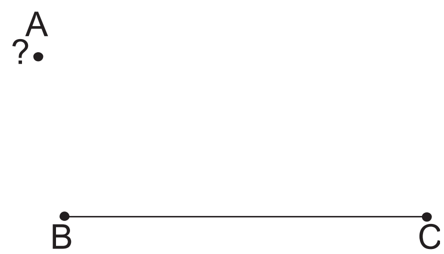
- et, un peu moins grave, mais ennuyeux dès qu'on parle de hauteurs, par exemple, le triangle à un angle obtus



Et si les ratages en solitaire ne prêtent pas à conséquence, les ratages devant un public exigeant peuvent être plus embêtants : il y aura toujours un petit malin prêt à vous importuner.
Je vous propose donc aujourd'hui la recette infaillible du triangle quelconque !

D'où vient la difficulté ?

Reprenons le problème à la base, c'est-à-dire au côté BC qu'on va se fixer une fois pour toutes : la question est de trouver A tel que ABC soit quelconque. Nous exigerons donc que le triangle ABC ne soit ni rectangle, ni isocèle et qu'il ait tous ses angles aigus (on appelle ça un triangle acutangle).

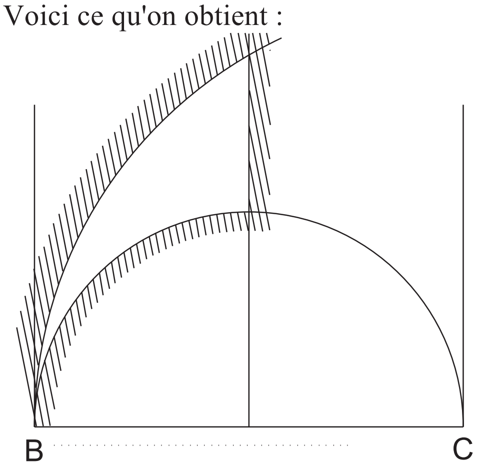


Pour réussir un plat, il faut suivre la tradition : [BC] sera horizontal, A sera au dessus de [BC], et plutôt à gauche. En outre, on supposera que BC est le plus grand côté, ce qui n'ôte aucune généralité au problème.
Il s'ensuit qu'on devra avoir
BC > AC > AB avec des inégalités strictes. Il ne reste plus qu'à faire le régionnement du plan correspondant à toutes les conditions imposées.

• BC > AC : on garde l'intérieur du cercle de centre C et de rayon BC ;

• AC > AB : on garde le demi-plan de frontière la médiatrice de [BC], et contenant B ;
• Â aigu : on garde l'extérieur du cercle de diamètre [BC] ;
• $\hat{B}$ et $\hat{C}$ aigus : on garde la « bande » verticale délimitée par les perpendiculaires en B et C à [BC].

Voici ce qu'on obtient :



Vous avez ici l'explication des ratages fréquents : la région autorisée n'est vraiment pas très grande !

Pour une réussite parfaite...

Il serait dommage d'en rester là : il ne suffit pas de réussir son triangle quelconque, il faut encore être à l'abri de toute critique. Et si par malheur votre point A est proche d'un des bords de la région autorisée, on aura vite fait de vous dire que votre triangle est presque rectangle, ou qu'il ressemble à s'y méprendre à un triangle isocèle ou que sais-je encore...

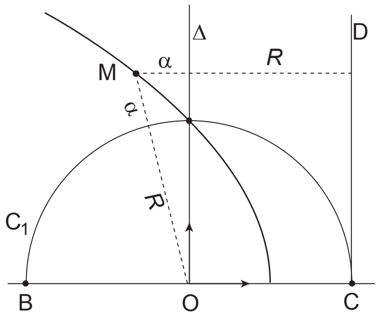
Pour que ABC soit le plus quelconque possible, il faut donc que le point A soit le plus éloigné des bords de la région autorisée. Cela sera réalisé quand A sera à égale distance des trois courbes constituant le bord.
Notons C_1 le cercle de diamètre [BC], C_2 le cercle de centre C et Δ la médiatrice de [BC], et étudions les courbes d'égale distance entre C_1 et Δ, et entre C_2 et Δ.

• Courbe d'égale distance entre C_1 et Δ :

Soit O le milieu de [BC] et D la perpendiculaire à (BC) passant par C.
Soit $R = \dfrac{1}{2}BC$, le rayon de C_1.

Si M est à égale distance α de C_1 et de Δ, M est à égale distance α + R de O et de D.
M décrit donc la parabole de foyer O et de directrice D.
Dans le repère orthonormé dessiné ci-contre, l'équation de cette parabole est :

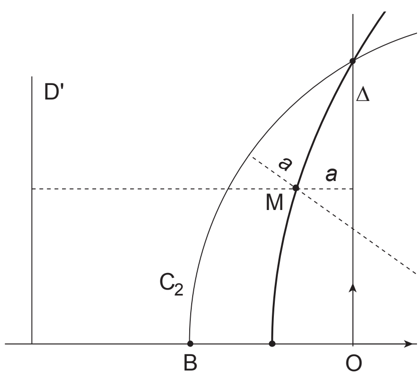
$$x = \frac{1}{2R}(R^2 - y^2)$$



• Courbe d'égale distance entre C_2 et Δ

Soit D' la perpendiculaire à (BC), coupant (BC) à une distance 2R du point O, du côté de B.
Si M est à égale distance a de C_2 et de Δ, M est à égale distance 2R - a de D' et du point C.
M décrit donc la parabole de foyer C et de directrice D'.
Dans le repère orthonormé choisi, l'équation de cette parabole est :

$$x = \frac{1}{6R}(y^2 - 3R^2)$$

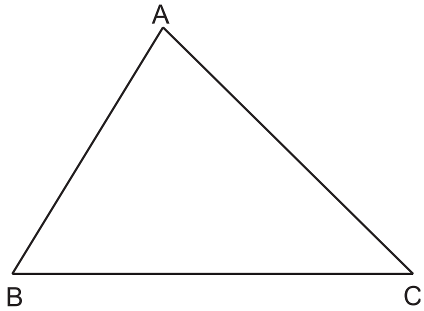


• Point à égale distance de C_1, C_2 et Δ :

Il est donné par l'intersection des deux paraboles ; le calcul dans le repère choisi donne : $x = -\frac{R}{4}$ et $y = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot R$

A titre d'exercice on peut d'ailleurs chercher la courbe d'égale distance entre C_1 et C_2 (c'est une ellipse de foyers O et C), qui passe par ce point.
Si A est en ce point, on peut calculer les angles A, B et C, à partir des coordonnées. On trouve :
$\widehat{A} = \text{arctg}\,\frac{16}{9}\sqrt{6}$; $\widehat{B} = \text{arctg}\,\frac{2}{3}\sqrt{6}$
$\widehat{C} = \text{arctg}\,\frac{2}{5}\sqrt{6}$.
Soit en valeurs approchées en degrés : $\widehat{A} \approx 77°4'$; $\widehat{B} \approx 58°31'$; $\widehat{C} \approx 44°25'$.

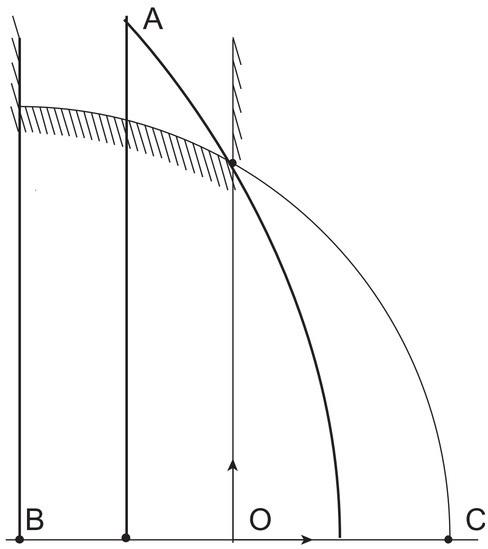
Conclusion : Il existe donc un triangle quelconque, plus quelconque que tous les autres : c'est le triangle dont les angles sont donnés ci-dessus. Le voici :



Pour vous faciliter le tracé, les côtés sont à peu près proportionnels à 32, 28 et 23, ce qui permet d'éviter l'usage toujours imprécis du rapporteur.
Enfin, pour les esthètes, je signale que le rectangle de côté [BC] et passant par A est presque un rectangle d'or : le rapport $\frac{BC}{AH}$ est égal au nombre d'or avec une précision inférieure à 1 % ! (H : pied de la hauteur issue de A). Le triangle le plus quelconque est donc aussi le plus beau !...

Post Scriptum :
Un de mes confrères, lisant ce qui précède, a émis des doutes sur l'hypothèse : « BC est le plus grand côté » préserve-t-elle la généralité du problème ?
Pour réduire les méchantes langues au silence, reprenons notre analyse dans les deux autres cas :

Si BC est le plus petit côté : c'est-à-dire AC > AB > BC



La région autorisée pour A a pour frontière deux demi-droites et un arc de cercle.

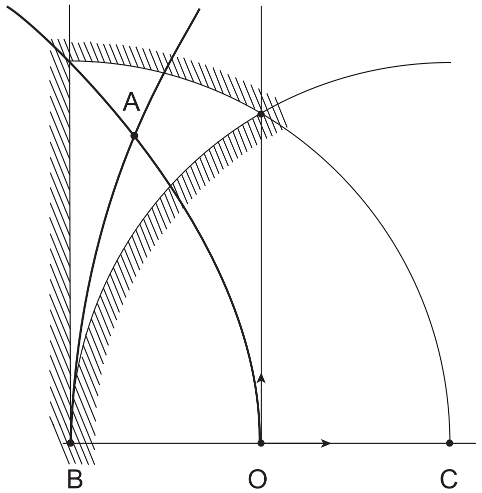
Les courbes d'égale distance sont une droite (verticale) d'équation :
$x = -\frac{R}{2}$ et la parabole :
$x = -\frac{1}{6}(y^2 - 3R^2)$

A leur intersection, on a A de coordonnées :
$x = -\frac{R}{2}$ et $y = R\sqrt{6}$

On déduit les angles :

$\widehat{B} = \text{arctg}\,2\sqrt{6} \approx 78°29'$
$\widehat{C} = \text{arctg}\,\frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 58°31'$
$\widehat{A} = \text{arctg}\,\frac{8}{21}\sqrt{6} \approx 43°$

Si BC est le côté médian : c'est-à-dire $AC > BC > AB$



La région autorisée pour A a pour frontière un segment de droite et deux arcs de cercles.
Les courbes d'égale distance sont les deux paraboles d'équations :

$$x = -\frac{1}{4R}y^2 \text{ et } x = \frac{1}{8R}(y^2 - 8R^2)$$

Leur point d'intersection A a pour coordonnées :

$$x = -\frac{2}{3}R \text{ et } y = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$$

On déduit les angles :

$\widehat{B} = \text{arctg } 2\sqrt{6} \approx 78°29'$

$\widehat{C} = \text{arctg}\frac{2}{5}\sqrt{6} \approx 44°25'$

$\widehat{A} = \text{arctg}\frac{12}{19}\sqrt{6} \approx 57°06'$

La « généralité du problème » en prend un vieux coup, malgré un angle commun pour chaque couple d'hypothèses. Y aurait-il donc plusieurs triangles plus quelconques que les autres ?

Ou plutôt : la réalisation d'ordre utilisée pour classer les triangles (du plus quelconque au moins quelconque) n'est pas la même selon l'hypothèse choisie pour BC et les trois relations d'ordre ainsi définies ne donnent pas le même « treillis » : chacune a son triangle le plus quelconque.
Intéressant, non?

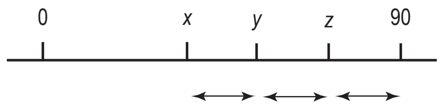
Sur le même thème, nous avons ressorti du manuel CEDIC « *Faire des mathématiques* » 4ème 1980, l'encart ci-dessous, qui prend un parti plus numérique :

Quel est le triangle le plus « quelconque »

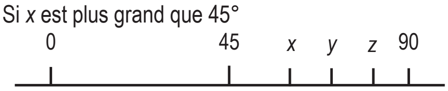
Tu l'as sûrement remarqué : on te demande de tracer un triangle sans angle obtus, quelconque et ton triangle est souvent plus ou moins rectangle ou plus ou moins isocèle ou…
Bref, il a l'air d'être plus particulier que quelconque.
Le triangle dont les angles sont 40°, 60°, 80° n'est pas mal, mais il a un angle presque droit (à 10° près).
Essayons de trouver un triangle dont les angles soient tous aigus, différents le plus possible de 90° tout en différant le plus possible entre eux.
Autrement dit, étant donnés trois nombres *x, y,* et *z* tels que

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ 0<x<y<z<90 \end{cases}$$

on voudrait que les différences $90-z, z-y, y-x$ soient les plus grandes possibles.



Voici un raisonnement difficile :
▪ Si *x* est plus grand que 45°



l'une au moins des 3 différences est inférieure à 15°.
Peur-on dépasser ces 15° fatidiques ?
▪ Si *x* est plus petit que 45°
alors *y* + *z* est plus grand que 135°.
Donc :
Si on veut que *z* soit plus petit que 75° alors il faut que *y* soit plus grand que 60°.
Mais alors $z-y$ devient inférieur à 15°.
▪ *Conclusion :* on ne peut pas faire que les trois différences $90-z, z-y, y-x$ soient toutes inférieures à 15°.
Conséquence : à 15° près des triangles rectangles ou isocèles, il n'y a qu'*un* triangle quelconque :
x = 45°, *y* = 60°, *z* = 75°.