Infini de pi

Véronique Cerclé

Cet article présente une séquence de réflexion sur les mathématiques menée avec les élèves de seconde à partir du texte de Marie Rouanet : *Infini de pi*.

Infini de pi, Editions Climats, 1999.
Le livre peut facilement se commander *via* internet. Il coûte 9,20 €.

Gravure de 1492 extraite de « Theorica Musicae ». Elle représente Pythagore faisant des expériences sur les corps sonores.

I Présentation

Un beau jour, à l'école primaire, on nous révélait pi.

C'est ainsi que commence le petit livre INFINI DE PI que la bibliothécaire de mon village m'avait passé. Marie Rouanet y évoque ses rencontres avec le nombre pi lorsqu'elle était enfant, et autres bribes de souvenirs de mathématiques scolaires.

Je le proposai alors à ma collègue de Français dans une classe de Seconde avec l'idée d'une activité Français-Maths. Elle me l'a rendu avec cette exclamation : « voilà une entrée pour l'étude du genre fantastique ! ».

Si, comme moi, vous pensiez que le propre d'un récit fantastique est d'être peuplé de monstres et autres extra-terrestres, vous devez être fort perplexe ! Mais j'appris alors que les spécialistes de littérature définissent le fantastique comme l'intrusion de l'insolite et de l'inexplicable dans le quotidien (en contrevenant à la cohérence du monde ordinaire, il fait surgir le mystère et la peur). Ils le distinguent ainsi du Merveilleux, peuplé d'ogres et de soucoupes volantes, mondes dans lesquels les phénomènes pour nous surnaturels sont admis comme normalité.

En relisant le texte avec cette grille de lecture, son côté fantastique m'apparut : Marie Rouanet insiste sur l'étrangeté de pi, son caractère étonnant, inhabituel, mystérieux et raconte le vertige ressenti par l'enfant qu'elle était alors.

Nous avons donc décidé d'exploiter le texte INFINI DE PI sur le thème du monde fantastique des mathématiques avec la problématique : « *peut-on parler d'un monde mathématique* ? »

II Objectifs

En Français (F) :

- Saisir la dimension de l'espace fantastique, toujours en balance entre le réel et le surnaturel (Maupassant : « *le fantastique coudoie le réel et le surnaturel* »), source d'effroi, d'inquiétude profonde ; expérience racontée avec une dimension de mystère et de suspense.
- Saisir la structure de la nouvelle fantastique.

En Maths (M) :

Réfléchir sur la réalité du monde mathématique, de ses objets : le monde mathématique est-il dans le réel ? Dans le surnaturel ? Entre les deux ?

III Déroulement

Le travail s'est effectué en novembre soit sur les heures de français, soit sur celles de maths. Je suis intervenue avec ma collègue de français à deux reprises pendant ses heures pour une approche mathématique.

1) Analyse du schéma narratif

Le travail consistait donc d'abord, pour la collègue de Français, en la prise de conscience du schéma narratif d'un récit fantastique :

F : lecture du texte INFINI DE PI
- situation initiale : conception rassurante des maths, égales au réel (calcul, mesure)
- élément modificateur : la découverte de pi
- péripéties : vertige de plus en plus grand, désarroi, paradoxes infranchissables, irrationnels
- élément de résolution : fermer la porte du vertige en ignorant l'irréel inclus dans la réalité

- situation finale : le trouble est défini, dépassé ; l'objet math reprend sa forme rassurante

Je suis alors intervenue dans le cours de Français, à la suite de ma collègue, pour illustrer ce schéma dans un autre contexte, en racontant aux élèves l'histoire du problème posé par $\sqrt{2}$.

(M) : mise en parallèle avec la découverte de $\sqrt{2}$ par les Pythagoriciens (1/2 heure environ)
- situation initiale : Pythagore découvre le lien entre les écarts de notes en musique et les fractions[1]→ conviction que « tout est nombre », que les outils maths permettent de déchiffrer la raison du monde réel
- élément modificateur : la découverte de $\sqrt{2}$: existe sur le papier mais pas dans leur cadre de pensée (nombres = entiers + fractions)
- péripéties : naufrage du navire (texte de Proclus)[2] et de la secte des disciples de Pythagore
- élément de résolution : séparer les nombres et les grandeurs
- situation finale : on peut continuer à faire des maths !

Ceci a permis de parler un peu d'histoire des maths : les élèves ont ainsi pris conscience que l'avancée des recherches mathématiques procédait très souvent sur un schéma similaire : confronté à un problème lui faisant question (élément modificateur) le mathématicien cherche (péripéties) jusqu'à la solution (situation finale). Et aussi que les maths n'étaient pas un monde figé, mais plein d'angoisses, de questions. Sans oublier un petit rappel non inutile sur les nombres irrationnels…

2) Une expérience fantastique

Pendant qu'en Français ma collègue travaillait sur les différentes parties :

(F) : analyse du texte

- situation initiale : étudier la mise en place d'un univers réaliste, ancrage dans le réel ;
- élément modificateur : étudier les expressions des sentiments, la caractérisation de l'insolite.

L'idée me vint de faire vivre aux élèves de Seconde une expérience fantastique, ou plus exactement de les plonger dans le trouble en leur faisant réaliser qu'ils sont déjà dans le surnaturel sans qu'ils s'en soient rendu compte *: les nombres réels sont-ils réels ? Les opérations ont-elles du sens ?*

(M) : réflexion sur la réalité des mathématiques (1 heure de réflexion avec la collègue de Français + ½ heure de synthèse en maths).

Nous avons d'abord réfléchi à la réalité des nombres : les élèves ont ainsi recherché quels sont les types de nombres qui représentent du concret : → ils ont trouvé les entiers (des pommes) les fractions (des parts de gâteau), les négatifs (des dettes), les décimaux (ce sont des rationnels, ou plus simplement des mesures de longueurs avec une certaine unité et une certaine précision), les racines carrées (hypoténuses) ; mais avons eu un problème avec certains irrationnels…(le débat ne fut pas clos, ni avec les élèves, ni avec les collègues d'ailleurs !).

J'ai soumis à ce propos aux élèves, dans le cadre d'une perspective historique, différents points de vue : le problème des irrationnels (texte de Stevin) et celui des négatifs (texte de Carnot[4], le problème soulevé à l'époque par l'égalité 1/(-1) = (-1)/1[5]; la citation de Kronecker (« *Dieu a créé les entiers, l'Homme a inventé le reste* »).

Nous avons ensuite réfléchi à la réalité des opérations, en recherchant un problème concret conduisant à des opérations proposées → il a été plus ou moins facile

[1] Voir les illustrations de *Musique et Mathématiques* de B. Parzysz (Brochure APMEP n° 53).

[2] Voir en annexe le texte trouvé dans le fascicule des thèmes du manuel *Indice* de seconde (Bordas).

[3] Voir en annexe le texte trouvé dans *Mathématiques au fil des âges* (Gauthiers-Villard).

[4] Voir en annexe le texte trouvé dans *Mathématiques au fil des âges* (Gauthiers-Villard).

[5] La première a le numérateur supérieur au dénominateur, alors que c'est le contraire pour la deuxième et pourtant ces deux fractions sont égales !

d'interpréter $(-3)+(-5)$ (cumul de dettes), $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ (parts de gâteaux), $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ (aire d'un rectangle, les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ d'un gâteau); mais impossibilité pour $(-3)\times(-5)$!

Je leur ai ici distribué le texte[6] où Stendhal explique son désarroi face à la règle des signes « moins par moins fait plus ».

Nous avons donc été d'accord pour admettre que les nombres étaient bien fantastiques au sens littéraire du terme : "entre réel et irréel" !

(F) : analyse du texte

- péripéties : progression du trouble (de l'étonnement au vertige) ; la caractérisation fantastique ; l'expression de la contradiction.

3) Le monde fantastique des mathématiques ?

A partir de l'analyse des deux dernières parties du récit (« élément de résolution » et « situation finale ») étudiées en Français nous avons tenté de faire comprendre que l'univers mathématique s'apparente à un monde fantastique, c'est-à-dire à cheval entre le réel et le surnaturel.

(F) : analyse du texte

- résolution : expression de la rationalité : définition du trouble, négation du vertige ;
- situation finale : expressions associées aux mathématiques : progression de la conception.

Nous avons cherché des parallèles avec des problèmes rencontrés en cours de mathématiques.

(M) : en quoi peut-on parler d'un monde mathématique ?

- un monde où le vrai est « plus vrai que le vrai » (CF texte INFINI DE PI) : j'ai évoqué le refus du « ça a l'air vrai » (exemple : les vecteurs (8 ; 0) et (7 ; 4) ont-ils même longueur ?), le refus du presque vrai (exemple : le triangle de côtés 2,5 ; 3,5 ; 4,3 est « suffisamment » rectangle pour le maçon), le refus du presque toujours vrai (rappel de la conjecture de Syracuse : on ne sait pas si c'est toujours vrai)
- un monde d'objets « réels » impossible à représenter (exemple : le point). Je leur ai distribué les « définitions » données par Euclide au début des Eléments.[7]

IV. Conclusion

L'évaluation finale a été faite par le professeur de français. L'objectif, dans sa discipline, était atteint : les élèves avaient effectivement progressé dans leur compréhension du genre fantastique. Par contre, il n'était pas manifeste que leurs conceptions des mathématiques avaient beaucoup évolué

Cependant les discussions qui ont suivi la séquence ont montré que les élèves avaient pris un certain intérêt à cette approche nouvelle de nos matières et nous ont révélé un aspect des choses que nous avions négligé : pour eux, voir deux profs de disciplines *opposées* s'entendre pour faire cours à deux voix, voir la prof de maths débarquer en cours de français, entendre la prof de français s'interroger sur les mathématiques... voilà bien une source d'interrogation et de mystère : étaient-ils dans le réel ou dans le surnaturel ?
Finalement les élèves pourront parler d'expérience fantastique !

[6] Voir en annexe le texte trouvé dans *Les maths et la Plume* (ACL-Kangourou).

[7] voir en annexe; extrait trouvé dans *Mathématiques et mathématiciens* de Dédron et Itard ; ce document m'a resservi lorsque j'ai introduit les triangles isométriques à partir de l'œuvre d'Euclide.

Annexe : $\sqrt{2}$

Texte trouvé dans le fascicule des thèmes du manuel de 2^{nde} Bordas.

Le calcul exact de $\sqrt{2}$ est un problème historique important pour les mathématiciens et philosophes grecs. La découverte de cette «quantité irrationnelle» est attribuée aux pythagoriciens. Des historiens racontent que ces pythagoriciens auraient voulu tenir secrète cette découverte:

« *On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret: ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues.* »

Proclus, $V^{ème}$ siècle ap JC

Annexe : des nombres irrationnels ?

Texte trouvé dans « *Mathématiques au fil des âges* » édition Gauthier-Villard

SIMON STEVIN *:* grandeurs incommensurables.

Thèses mathématiques

Thèse 1 : Que l'unité est nombre.

Thèse 2 : Que nombres quelconques peuvent être nombres carrés, cubiques, de quatre quantités, etc.

Thèse 3 : Qu'une racine quelconque est nombre.

Thèse 4 : Qu'il n'y a aucun nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds.

... prenons le côté et diagonale d'un carré, qui sont les lignes entre elles (par la dernière proposition du livre X d'Euclide) incommensurables, toutefois ni diagonale, ni côté (abstrait de nombre) n'est ligne absurde ou irrationnelle, l'incommensurance donc des quantités n'est pas l'absurdité d'icelles, mais c'est plutôt leur naturelle mutuelle habitude.

Il me mande de lui expliquer quelle chose soit $\sqrt{8}$ *. Je lui réponds qu'il m'explique quelle chose soit 3/4 (qui selon son dire est rationnel) et je la lui expliquerai.*

Traité des incommensurables grandeurs, Arithmétique, 1585.

Annexe : des nombres négatifs ?

Texte trouvé dans « *Mathématiques au fil des âges* » édition Gauthier-Villard.

LAZARE CARNOT : comment concevoir une quantité négative ?

« Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres : si l'on me donne pour exemple de quantités opposées un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul. »

Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, 1797.

LAZARE CARNOT : un labyrinthe de paradoxes.

« Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée?

Une multitude de paradoxes, ou plutôt d'absurdités palpables, par exemple, - 3 serait moindre que 2, cependant $(-3)^2$ serait plus grand que $(2)^2$; c'est-à-dire qu'entre ces deux quantités inégales 2 et - 3, le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité. »

Géométrie de position, 1803.

Annexe : STENDHAL : pourquoi moins par moins donne-t-il plus ?

Texte trouvé dans « *Les maths et la plume* » éditions ACL-Kangourou.

« Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur de l'hypocrisie [...]. Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques [...]. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que moins par moins donne plus ? On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise... » [...] . J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables. »

La vie de Henry Brulard