Graphiques et ensembles plaisants et délectables

Henry Plane

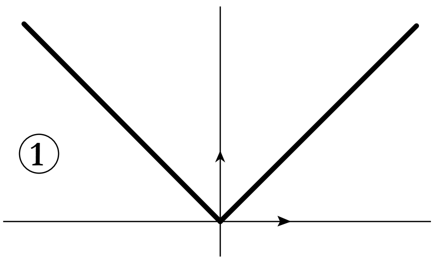
En prolongeant fort peu les techniques qui entourent, au lycée, le passage de la fonction $x \mapsto ax + b$ à sa représentation par une droite dite d'équation $y = ax + b$, à moins que ce ne soit l'ensemble des points de coordonnées (x,y) telle que $y = ax + b$, il est possible de faire surgir lors de ces cours secondaires, d'autres figures moins usuelles. Cela sort de la monotonie et peut réveiller l'intérêt.

A cette fin, il y a toujours quelques outils peut-être simplement délaissés.

Au premier rang la notation $\sqrt{\ }$ qui désigne, on le sait, la racine positive d'un nombre. On a le chant bien connu : $\sqrt{x^2}$ *égale x si x est positif, égale moins x si x est négatif*. Donc représentation de

1 : $y = \sqrt{x^2}$

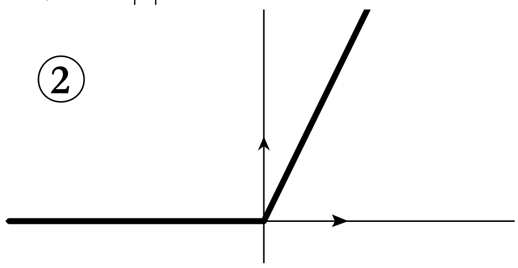
1



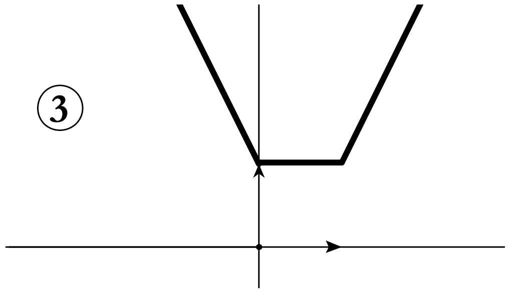
Rien à ajouter. Pour le graphique, deux régions : celle avec x positif, etc.…

Si l'on pratique la valeur absolue d'un nombre relatif x avec l'écriture $|x|$, le graphique **1** est également l'image de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $y = |x|$. Alors en partageant $\mathbb{R}$ en deux ou trois on obtiendra, par addition ou soustraction de $y = x$ et $y = |x|$ voire $y = |x-1|$, les graphiques suivants :

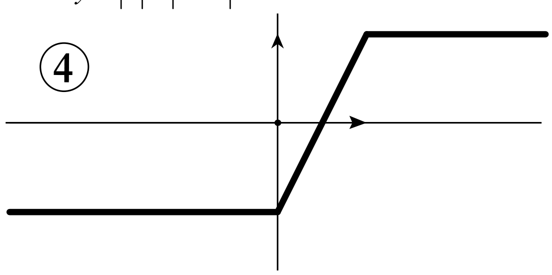
2 : $y = x + |x|$;



3 : $y = |x| + |x-1|$;

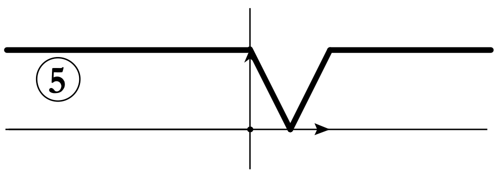


et **4** : $y = |x| - |x-1|$

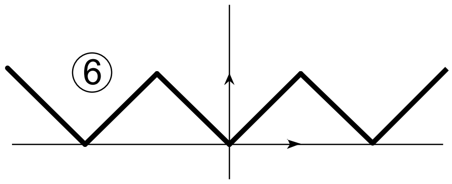


Un peu plus d'attention pour les suivants : même si on ne fait qu'insister sur les définitions et les domaines de définition :

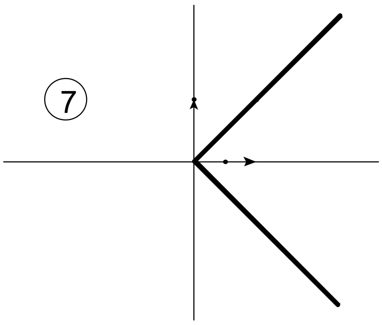
5 : $y = \left||x| - |x-1|\right|$, simple relecture de **4**



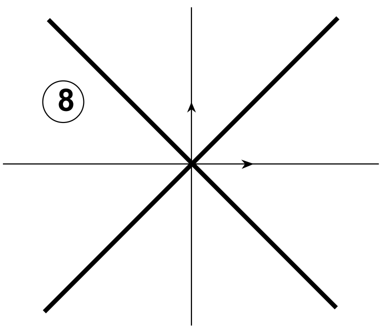
6 : $y = \left|\left|x-1\right|-1\right|$ on pourra multiplier les zig-zags…



Puisqu'il s'agit d'ensemble de points de coordonnées (x, y) pourquoi toujours « partir » de x ? Voici **7** : $x = |y|$



et, pas de jaloux : **8 :** $|y| = |x|$ (peut être encore : $\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2}$?)



Ensuite **9** : $|y| + |x| = 1$ il faudra porter attention avant de calculer, aux quatre quadrants du plan $\mathbb{R}^2$

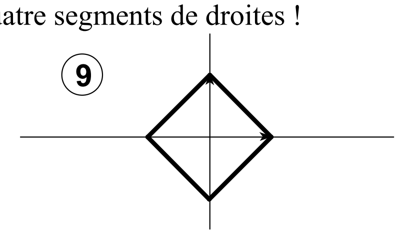
$x > 0$ et $y > 0$: $x + y = 1$

$x > 0$ et $y < 0$: $x - y = 1$

$x < 0$ et $y > 0$: $-x + y = 1$

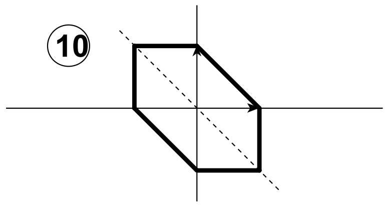
$x < 0$ et $y < 0$: $-x - y = 1$

Quatre segments de droites !



Rien d'autre dans cela que de porter attention aux conditions d'existence qui conditionnent une égalité.

Dans cette voie, avec cette fois six régions limitées par les droites x = 0, $y = 0$ et $x + y = 0$, on aura, par exemple,
10 : $|x| + |y| + |x + y| = 2$



Après avoir distingué pour un réel x son signe et sa valeur absolue, on peut distinguer sa partie entière E (x) et sa partie décimale D(x).

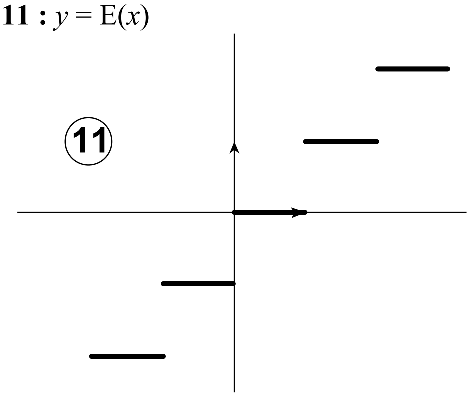
$\mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right) = 1 \quad \mathrm{E}(\pi) = 3$

Précisons : E(x) = a veut dire que a est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
E (x) = a avec $a \in \mathbb{Z}$ tel que

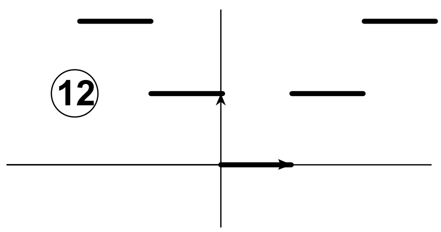
$$a \leqslant x < a + 1$$

Attention : pour x négatif :
$\mathrm{E}(-0{,}6) = -1$ car $-1 \leqslant -0{,}6 < 0$ (s'il y a difficulté on pourra limiter l'étude à x positif…).

Donc graphique « en escalier »
11 : $y = \mathrm{E}(x)$

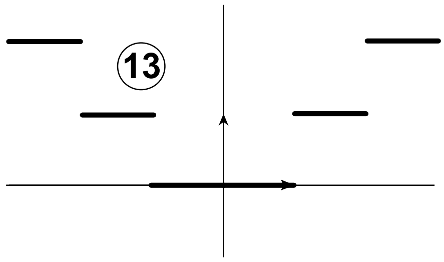


Et **12** : $y = \left|\mathrm{E}(x)\right|$



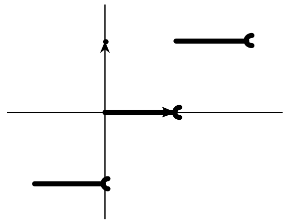
et **13** $y = \mathrm{E}|x|$.

Attention $|\mathrm{E}(x)| \neq \mathrm{E}|x|$.



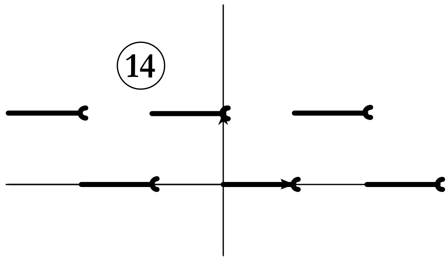
Dans un second temps on peut être plus précis, mais n'est ce pas là, l'occasion d'aborder les notions de continuité, de limite (voire de semi-continuité..) ?

Que se passe-t-il pour x entier ? $x \in \mathbb{Z}$, E (x) = x. Mais E (0,999…) = 0 et E (1,000…1) = 1
Il sera possible, par exemple, de convenir d'une représentation telle que :

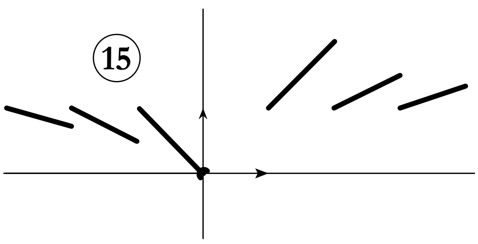


Apparaissent alors d'autres formes de graphiques, tels :

14 $y = \mathrm{E}(x) - 2\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right)$



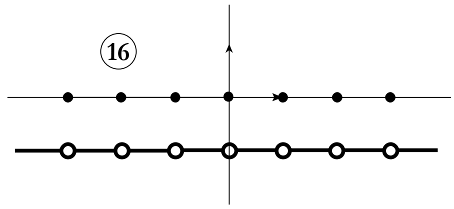
et **15 :** $y = \dfrac{x}{\mathrm{E}(x)}$ non défini pour $0 \leqslant x < 1$



N'oublions pas $\mathrm{E}(-x)$.

Si $x \in \mathbb{Z}$ $\quad \mathrm{E}(-x) = -\mathrm{E}(x)$
E (-1) = -1 = - E(1)
Mais Si $x \notin \mathbb{Z}$ $\quad \mathrm{E}(-x) \neq -\mathrm{E}(x)$
E (-0,5) = - 1 ≠ E (0,5) = 0
E (-x) = - E (x) – 1

Ce qui modifie le « voisinage » des entiers et donne un autre aspect avec avec **16 :** $y = \mathrm{E}(-x) + \mathrm{E}(x)$ (avec des points très conventionnels !…)

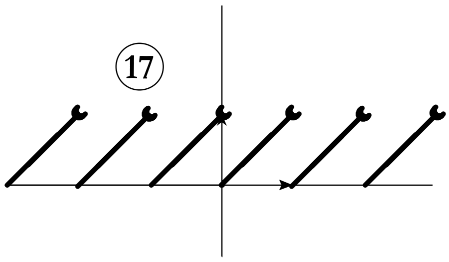


Et D(x) ? D (x) = x – E (x)

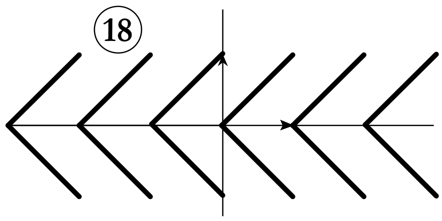
$\mathrm{D}(-0,6) = (-0,6) - \mathrm{E}(-0,6)$
$= (-0,6) - (-1) = 0,4$
$\mathrm{D}(-x) = -x - \mathrm{E}(-x) = -x - (-1 - \mathrm{E}(x))$
$= 1 - (x - \mathrm{E}(x)) = 1 - \mathrm{D}(x)$

$0 \leqslant \mathrm{D}(x) < 1$ fonction bornée
D (x + 1) = D (x) fonction périodique

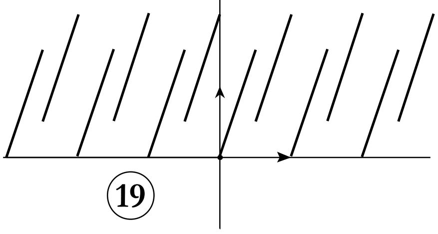
Encore de nouvelles situations :
17 :. y = D (x)



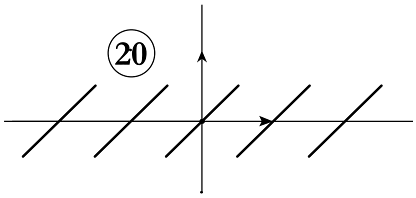
Ne pas oublier **18 :**
D(y) = D (x)



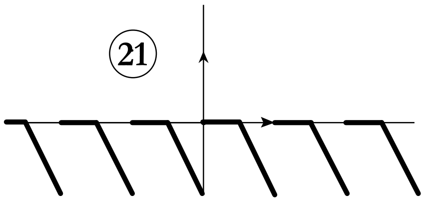
Des périodes, d'autres périodes :
19 *:* $y = \mathrm{D}\,(2x) + \mathrm{D}\,(x)$



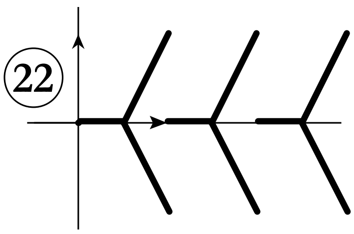
20 : $y = \mathrm{D}(2x) - \mathrm{D}(x)$



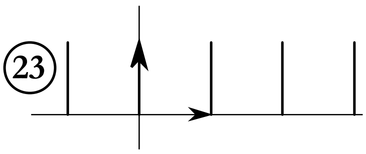
21 : $y = \mathrm{D}(2x) - 2\mathrm{D}(x)$



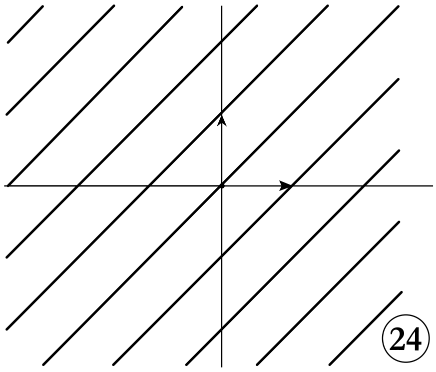
22 : avec $|y| = \mathrm{D}\,(2x) - \mathrm{D}(x)$



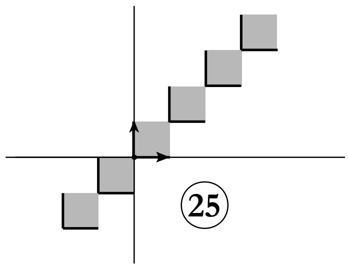
Et on peut brasser le tout .
23 : E (y) = D (x) E (y) $\in \mathbb{Z}$
donc D(x) = 0 et x $\in \mathbb{Z}$
et $0 \leqslant y < 1$



24 : D (x) = D (y) ou $y = x + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$: des parallèles !

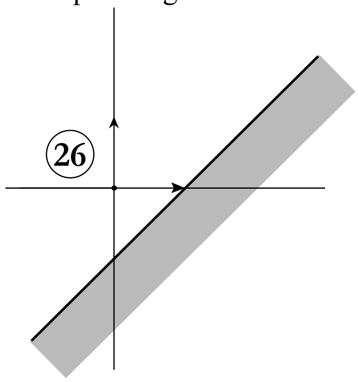


25 : E (y) = E (x) Carrés ouverts en haut et à droite fermés en bas et à gauche



On passe donc à des surfaces, mais il a pire !

26 : E (x – y) = 1 $\quad 1 \leqslant x - y < 2$
Une bande pour le grand ARNAUD



27 : $\mathrm{E}(2y) = 2\mathrm{E}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Rectangles "dignes de bel esprit" !