Opérations et calcul algébrique

François Drouin

La diversification des présentations des calculs algébriques que François Drouin nous propose ici est intéressante à plus d'un titre. Elle donne des pistes dans le cadre d'une remédiation mais, en donnant du sens à la succession des opérations effectuées, en permettant la mise en parallèle avec des techniques acquises bien avant, ce peut être l'occasion d'une véritable redécouverte pour l'élève de troisième ou de seconde.

François Drouin est professeur au collège les Avrils à Saint Mihiel (Meuse)

Nos élèves au collège, et plus tard au lycée, éprouvent souvent de grandes difficultés avec les calculs algébriques.
J'ai participé à un groupe de recherche de l'IREM de Lorraine travaillant sur ce thème, et nous avons constaté comme beaucoup d'entre vous que les mots « développer » et « factoriser » étaient pour eux vides de sens. Après avoir exploré des pistes visualisant ce qui était mis en œuvre lors de leur utilisation, nous avons ressenti le besoin de favoriser au maximum les liens avec le calcul numérique ...

Développer

Des visualisations sous forme de tableaux multiplicatifs sont présentes dans nos manuels de quatrième et peuvent être mis en correspondance avec d'autres rencontrés à l'école primaire.

Lors de l'étude de la « distributivité » en classe de cinquième, des sommes (ou des différences) sont multipliées, en référence à des calculs tels que 43×7 faisant intervenir $(40 + 3) \times 7$.

En classe de quatrième, une « double distributivité » est mise en œuvre, pouvant également être mise en parallèle avec le calcul numérique.

×	$2x$	3
x	$2x^2$	$3x$
7	$14x$	21

×	20	3
10	200	30
7	140	21

Personnellement, j'évite d'utiliser en classe les mots « distributivité » et « double distributivité ». Leur usage me semble incorrect puisqu'il s'agit de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction. Je pensais comme beaucoup que ce raccourci d'écriture était admissible jusqu'à ce qu'une analyse d'erreur d'une de mes élèves me fasse changer d'avis.

Cette élève avait fait l'erreur classique : $(x + 2)^2 = x^2 + 4$. Que lui répondre lorsqu'elle m'explique avoir « distribué » le 2 ? Les identités remarquables n'avaient pas encore été rencontrées (je ne les aborde qu'après Noël) et je désirais que l'élève travaille avec $(x + 2) \times (x + 2)$.

Clairement, cette élève n'avait pas conscience de ce qu'elle distribuait …

Développer, c'est rentrer dans un processus de multiplication

Les tableaux multiplicatifs précédents visualisent des multiplications. Nous avons voulu aller plus loin en posant les opérations :

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x & + & (-3) \\
 & \times & 3x & + & 2 \\
\hline
 & & 4x & + & (-6) \\
6x^2 & + & (-9x) & & \\
\hline
6x^2 & + & (-7x) & + & (-6)
\end{array}
$$

Cette multiplication peut être mise en « parallèle » avec celles ci-dessous :

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 20 & + & 3 \\
 & \times & 30 & + & 2 \\
\hline
 & & 40 & + & 6 \\
600 & + & 90 & & \\
\hline
600 & + & 130 & + & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & 2 & 3 \\
\times & 3 & 2 \\
\hline
 & 4 & 6 \\
6 & 9 & 0 \\
\hline
7 & 3 & 6
\end{array}
$$

x joue le rôle des dizaines et x^2 le rôle des centaines.

En classe de troisième, ces visualisations des calculs mis en œuvre restent bienvenues. Poser les opérations devient difficile dans le cas de calculs tels que $\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$

Dans un calcul comme $\left(\sqrt{3}+2\right)\times\left(2\sqrt{3}+5\right)$ ou $\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(2\sqrt{3}+4\right)$, le rôle d'unités, de dizaines ou de centaines n'apparaît plus. Il faut donc quitter la visualisation des opérations posées pour revenir aux tableaux multiplicatifs …

Historiquement, les opérations « posées » ont précédé le calcul en ligne. C'est principalement pour des raisons de commodité typographique que celui-ci s'est imposé par la suite.

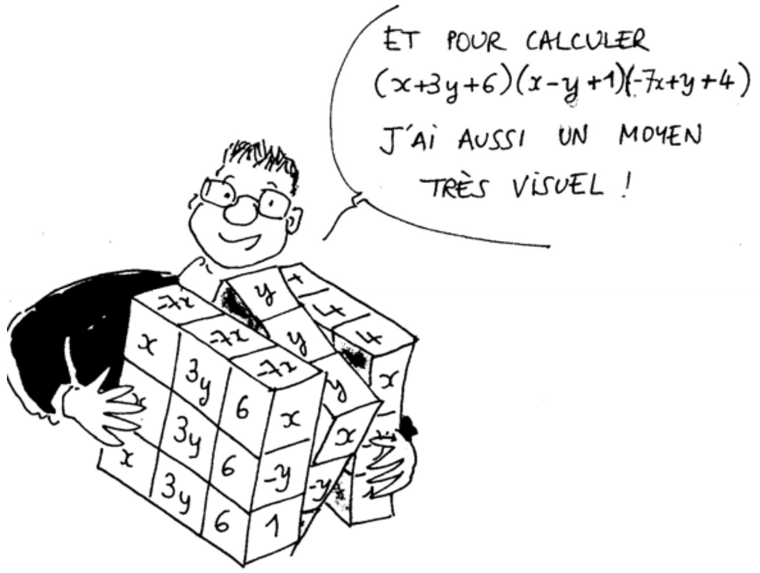
$\times$	$\sqrt{3}$	3
$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}\times\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}\times 3$
5	$5\times\sqrt{3}$	5×3

Dans les manuels, les opérations posées sont absentes, les tableaux multiplicatifs se retrouvent dans les activités introductrices et laissent rapidement la place à l'utilisation de techniques de calculs en ligne. Les trois présentations visualisent à leur manière la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou la soustraction). Leur mise en parallèle facilite la prise de conscience que c'est la même propriété qui est mise en œuvre.

Il est peut-être raisonnable de ne privilégier le calcul en ligne qu'à l'entrée en seconde générale.

Réduire

Ce mot apparaît fréquemment dans les tâches demandées à nos élèves.



Pourquoi réduire? Pour faire "plus court" ? Pour terminer les calculs, comme avec des chaînes de calcul numérique ? Ne serait-ce pas le temps de se persuader que malgré leurs aspects différents, les écritures $(2x + 5)(5x + 6)$ et $(2x + 5)^2 + (2x + 5)(3x + 1)$ représentent la même expression , tout comme 25×56 et $(25^2 + 25 \times 31)$?

Dans le cas du calcul numérique, un intérêt de « réduire » des expressions telles que « 12 – 5 » et « 4 + 3 » est bien de comprendre qu'elles repré-sentent le même nombre.

Ordonner

Naguère, il était de plus demandé d'ordonner. Ceci n'est plus exigé, mais cela est fait systématiquement dans les écritures proposées (nous ne rencontrons pas de sujets au brevet des collèges faisant travailler avec « $-5+2x$ » ou « $-10-2x^2+9x$ »). Pour savoir si des écritures représentent un même « nombre », il faut pourtant développer, réduire et ordonner…

Nos habitudes d'écritures algébriques ne sont pas nécessairement naturelles pour nos élèves. En quoi $3x + 2$ est-il préférable à $2 + 3x$? Il semble important de leur expliquer que l'ordre choisi pour l'écriture de $2x-5$ ou $-2x^2+9x-10$ a peut-être quelque chose à voir avec l'ordre d'écriture des chiffres des centaines, des dizaines et des unités de la numération décimale.

Par ailleurs, la visualisation de multiplications dans le cadre de calcul algébrique peut donner du sens à ce besoin d'ordonner.

Les opérations posées (avec des expressions ordonnées…) permettent, comme cela a été écrit précédemment, de faire le lien avec le calcul numérique.

Dans l'expression « $2x + 3$ », « x » joue le même rôle que les dizaines et « 3 » le même rôle que les unités.

Pour une expression comme « $2x^2 + 5x + 7$ », des rapprochements avec centaines, dizaines et unités sont envisageables. Le « décalage » dans les multiplications devient naturel, le fait d'ordonner les expressions algébriques trouve une justification :

la multiplication $(2 + 3x)\times(4x + 5)$ ne se pose pas de façon traditionnelle …

$$\begin{array}{r} 2 + 3x \\ \times \quad 4x + 5 \\ \hline 10 + 15x \quad\quad \\ 8x + 12x^2 \\ \hline 10 + 23x + 12x^2 \end{array}$$

Factoriser

Je ne pense pas que dire « factoriser, c'est transformer une somme en produit » soit satisfaisant.

L'expression « $1\times[(2x - 5)^2 - (2x - 5)(3x - 7)]$ » n'est pas une factorisation satisfaisante. Une somme algébrique a cependant été transformée en produit …

Mais l'objectif n'est pas juste de voir un produit.

Nous retrouvons ici notre besoin « d'autre chose » lorsqu'un élève écrit $24 = 1\times 24$.

Il semble important de relier ce besoin de factoriser des expressions

algébriques avec la résolution d'équations, et en particulier d'équations produit : la « factorisation » présentée quelques lignes plus haut est acceptable, mais ne nous permet pas d'avancer dans la recherche de solutions de l'équation.

$$(2x - 5)^2 - (2x - 5)(3x - 7) = 0$$

Un peu de lecture
« Calcul algébrique en 4ème : un prolongement du calcul numérique et quelques détours géométriques » IREM de Lorraine 2001.

Et dans nos évaluations ?

Voici un extrait du Brevet des Collèges de juin 2001 commun aux académies de Nancy-Metz, Besançon, Dijon, Lyon, Reims et Strasbourg :

> On considère l'expression :
> $C = (2x - 5)^2 - (2x - 5)(3x - 7)$
>
> 1- Développer et réduire C
> 2- Factoriser l'expression C
> 3- Résoudre l'équation :
> $(2x - 5)(2 - x) = 0$

Pour la question 1, voici des mises en forme des calculs qu'il me serait agréable de rencontrer dans des copies lorsque je suis convoqué à la correction du Brevet des Collèges. Je serais amené à penser que l'élève a compris les calculs qu'il est en train de faire…

$$\begin{array}{r} 2x + (-5) \\ \times \quad 2x + (-5) \\ \hline (-10x) + 25 \\ 4x^2 + (-10x) \quad\quad \\ \hline 4x^2 + (-20x) + 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + (-5) \\ \times \quad 3x + (-7) \\ \hline (-14x) + 35 \\ 6x^2 + (-15x) \quad\quad \\ \hline 6x^2 + (-29x) + 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + (-20x) + 25 \\ -6x^2 + (-29x) + (-35) \\ \hline -2x^2 + 9x + (-10) \end{array}$$