Faut-il enseigner les mathématiques à tous les élèves ?

Roland Charnay

Formateur à l'École Normale puis à l'IUFM de Bourg-en-Bresse depuis 1968, directeur de cet IUFM de 1991 à 2001, Roland Charnay s'est beaucoup impliqué dans la recherche en didactique des mathématiques. Membre ou co-responsable de plusieurs recherches à l'INRP sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (groupe ERMEL) et au collège, il a participé à plusieurs publications issues en particulier des recherches INRP (collection ERMEL pour le primaire) et a écrit de nombreux articles dans différentes revues, en particulier dans « Grand N » dont il fait partie du comité de rédaction. Il est également auteur, avec Michel Mante, d'ouvrages de préparation au CRPE (Concours de Recrutement des Professeurs d'École) et directeur de collection d'un manuel de primaire.
Sa réflexion, ses convictions, son inlassable travail de persuasion pour un bon enseignement des mathématiques à l'école primaire font de ses écrits une référence en la matière. C'est ainsi que Roland Charnay a participé au groupe « Joutard » pour les nouveaux programmes du primaire et a été responsable du sous-groupe chargé des programmes de mathématiques. Il participe également au GEPS Sciences et au sous-groupe « mathématiques » pour les programmes de collège. Il est enfin très sollicité pour assurer des conférences en France et à l'étranger.

Faut-il enseigner les maths à tous les élèves ? Que le lecteur se rassure (ou s'inquiète…) ! Ma réponse sera : OUI.

La question est-elle incongrue ?

Sans doute pas, puisque des personnalités éminentes émettent des réserves à ce sujet. La vulgarisation de l'outil informatique permettant d'effectuer les calculs et les tracés de courbes conduirait, selon elles, à dévaluer l'importance accordée aux mathématiques et à leur enseignement.[1] Même si elle paraît incongrue, dès lors que la question est posée et peut même sembler relever du simple bon sens, une réponse argumentée s'impose. Cet article me donne l'occasion d'y apporter ma contribution.

La réponse est-elle évidente ?

Sur l'intérêt des mathématiques dans la société, mieux vaut laisser la parole aux experts qui, au-delà de l'usage que chacun d'entre nous peut par exemple faire des nombres et du calcul élémentaire, mettent en avant le rôle des mathématiques dans le développement des sciences et des techniques… et plus précisément de l'informatique : « *Aujourd'hui l'informatique, et son usage universel dans la modélisation, sont indissolublement liés aux mathématiques, qui conditionnent leurs progrès. Les concepts mathématiques, par leur généralité, leur simplicité et leur puissance, constituent un apport précieux, et parfois une base essentielle, à toutes les sciences. Sciences, industries et services font appel aux mathématiques à des degrés divers. D'ailleurs, les mathématiques émergent de toutes les sciences et les alimentent de façon parfois imprévue. Ce mouvement, constant au cours de l'histoire, s'accélère aujourd'hui* »[2].
Mais cette prise de position de spécialistes n'implique pas immédiatement de réponse concernant l'enseignement des mathématiques à tous les élèves. Pourquoi, par exemple, ne pas assurer le « minimum vital » à tous et réserver le reste, dès le collège, à ceux qui éprouveraient plus d'intérêt pour cette discipline ?

La question n'est-elle pas mal posée ?

En mathématiques, un problème bien posé a plus de chances d'être résolu qu'un problème mal formulé. Il en va de même des problèmes de société et il convient de ne pas se laisser prendre aux pièges des questions qui nous sont adressées. Avant de répondre à celle qui est formulée dans le titre de cet article, j'envisagerai trois autres questions, en

[1] "*Les mathématiques sont en train de se dévaluer, de façon quasi inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs. Idem pour les constructions de courbes*" (selon Claude Allègre, alors Ministre de l'Education nationale, dans France-Soir, 23 novembre 1999).

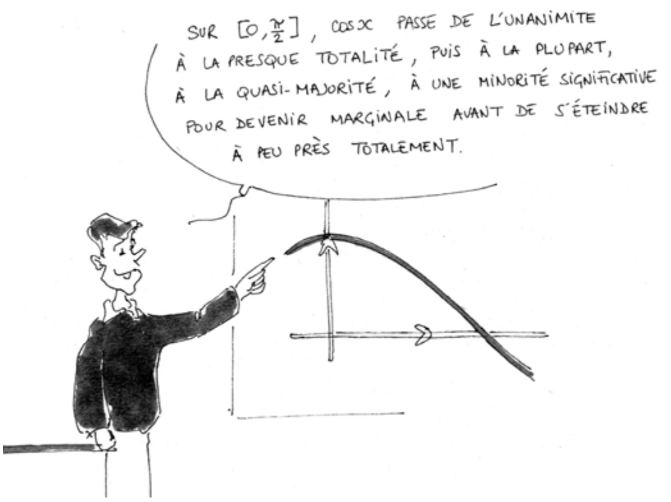
[2] Extrait du texte signé par plusieurs membres de l'Académie des Sciences, suite aux déclarations de Claude Allègre.

limitant mon propos à la scolarité obligatoire (école et collège) : de quelles connaissances mathématiques les futurs adultes que sont les élèves auront-ils besoin ? Que peut leur apporter une pratique mathématisante ? Quel enseignement est le plus profitable aux élèves ?

De quelles connaissances mathématiques les futurs adultes auront-ils besoin ?

Se projeter dans l'avenir est toujours chose délicate. Mais il est possible d'avancer quelques éléments de réponse, même en demeurant sur le versant utilitariste qu'il serait irréaliste de négliger.

Pour le commerce quotidien de notre existence, il est vrai que les techniques mathématiques (calculatoires, par exemple) dont la maîtrise est nécessaire sont plus réduites aujourd'hui qu'hier : utilisation des nombres entiers et décimaux, sens des opérations usuelles, maniement de la proportionnalité, des pourcentages, pratique du calcul mental exact et approché, repérage dans un espace réel ou représenté (plan…), vision géométrique (formes et relations



élémentaires, représentation d'objets en perspective…), connaissance des grandeurs usuelles et de leur mesure (unités et changement d'unités). La liste n'est sans doute pas exhaustive, mais elle dépasse peu les notions aujourd'hui abordées à l'école primaire et dans les toutes premières années du collège.

Pour l'exercice de leur pratique citoyenne qui exige esprit critique, choix, décisions, d'autres compétences mathématiques sont nécessaires : lire et interpréter une représentation graphique (un sondage, par exemple), apprécier la logique d'une argumentation[3]… Autant de capacités qui nécessitent des compétences mathématiques et logiques plus élaborées que celles citées précédemment.

Quant à leur avenir professionnel, il n'est pas déterminé à l'avance et impliquera des compléments de formation qui, peut-être, nécessiteront d'autres connaissances mathématiques dont certaines auraient dû être acquises au préalable.

Si l'école obligatoire doit assurer ce socle sur lequel se construira la vie de chacun, on voit que le bagage mathématique doit être plus et mieux rempli qu'il ne peut y paraître au premier abord.

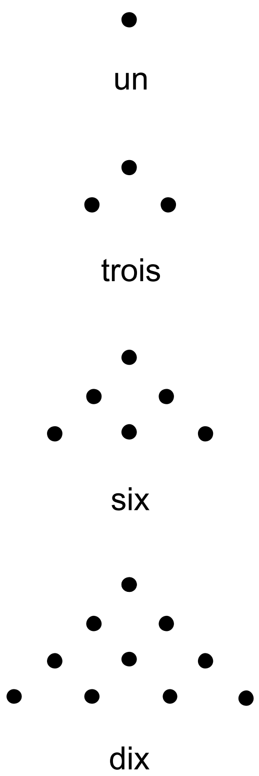
Que peut apporter une pratique mathématisante ?

En plus d'être un ensemble de savoirs en évolution, les mathématiques sont aussi une méthode de pensée. En quoi l'initiation à cette méthode de pensée peut-elle aider les élèves à former leur propre manière de penser et d'agir ?

Penser mathématiquement, c'est repérer dans une situation ce qui peut être formulé en termes mathématiques de manière à pouvoir être traité à l'aide d'outils dont la puissance est avérée. Le très jeune enfant qui pense à dénombrer les assiettes qui sont sur la table pour aller chercher juste ce qu'il faut de couverts dans le placard est déjà dans cette situation, tout comme celui qui, plus tard, pensera à traduire un problème sous forme d'équations.

[3] J'entendais l'autre jour à la radio cette réponse, reproduite approximativement : *« La presque totalité des hôpitaux, la plupart, la quasi majorité d'entre eux… »* en me disant que « la presque totalité » devrait tourner autour de 90 %, « la plupart » être de l'ordre de 75 % et « la quasi majorité » approcher les 50 %... ce qui, en 3 secondes d'un discours, constitue quand même une belle régression ! Faut-il avoir fait des mathématiques pour chercher la petite (ou la grosse) bête là où je la cherche ? Je le pense !

Nombres triangles



Penser mathématiquement, c'est faire preuve d'imagination pour explorer un phénomène avant de conjecturer une réponse ou une loi. C'est, par exemple, le cas de cette équipe d'élèves qui veulent trouver un moyen de reconnaître si un nombre entier naturel est ou non un « nombre triangle » et, pour cela, commencent par observer la suite des premiers « nombres triangles » dans la perspective de dégager une caractéristique possible de ces nombres.

En cherchant par eux-mêmes à conjecturer une loi, ils auront bien plus réfléchi que s'ils avaient directement été confrontés à l'injonction de démontrer que tout nombre triangulaire est de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ (pour le $n^{\text{ème}}$ « nombre triangulaire).

Penser mathématiquement, c'est justement aussi être confronté à la question de la preuve qui prend la forme achevée de la démonstration au collège, mais se pose bien avant. L'élève de 7 ans qui veut convaincre son camarade qui a affirmé que « *5 + 4 est égal à 8* » qu'il a tort dispose de plusieurs moyens de preuve : la « réalisation » de la somme à l'aide des doigts en est un, l'appui sur une connaissance établie en est une autre : « *C'est pas possible, parce que 5 et 5 ça fait 10 et 5 plus 4, c'est 1 de moins, donc c'est 9* ». De même un élève de Sixième peut savoir que pour reconnaître un multiple de 4, il suffit de s'intéresser au nombre formé par les deux derniers chiffres. La démonstration générale n'est pas à sa portée, mais en s'appuyant sur un exemple (que Nicolas Balacheff qualifie de générique) il peut emporter la conviction d'un interlocuteur : « *Par exemple, je prends 1 748. 1 700 c'est 17* x *100, c'est donc un nombre multiple de 4… et ce sera toujours comme cela. Il ne me reste plus qu'à regarder 48* ». Le fait que la somme de deux multiples de 4 est un multiple de 4 n'est pas ici formulée, mais utilisée implicitement. Mais faut-il attendre que tout soit en place (formalisme, théorèmes) pour faire des démonstrations propres ou faut-il confronter très tôt les élèves à des questions de preuve, traitées de manière incomplète, mais qui sont des étapes dans la conquête de la vérité et de la rigueur mathématique ?

A travers ces quelques exemples qui ne suffisent pas à décrire le « penser mathématiquement », nous avons vu se développer l'initiative dans l'utilisation des connaissances (même si celles-ci sont encore rudimentaires), l'imagination et la coopération pour venir à bout d'une difficulté, le raisonnement, la nécessité de convaincre par des arguments reconnus valides par autrui et l'exigence de la rigueur. Il est difficile de caractériser l'intelligence, mais, à coup sûr, à travers de telles activités, certains aspects s'en trouvent développés. Si une défense de la pratique mathématisante était nécessaire, c'est sans aucun doute dans cette pensée en action qu'on la trouverait aussi. Il n'est pas sûr qu'il soit aisé d'en convaincre les productivistes de tous poils. Mieux vaut donc s'adresser à l'intelligence des humanistes authentiques. Sans oublier que ce qui peut paraître gratuit au départ (développer son intelligence) est sans doute ce qui est le plus rentable à l'arrivée (utiliser son intelligence).

Quel enseignement est le plus profitable aux élèves ?

Je prends un exemple commun. A des élèves de CM2 qui ne connaissent rien à propos de la comparaison des nombres décimaux, la question est posée directement : *Quel est le plus grand de ces deux nombres : 8,26 ou 8,3 ?* Chacun formule sa réponse, sans avoir à la justifier. Certains affirment que c'est 8,26 ; d'autres que c'est 8,3.

L'enseignant ne tranche pas. Il demande aux élèves, par équipes de deux, de se prononcer pour une réponse commune et de la justifier, de trouver des arguments en sa faveur et de les écrire.

Parmi les arguments recueillis, il en sélectionne quelques-uns :

Argument 1 : *8,26 est le plus grand car 26 est plus grand que 3.*

Argument 2 : *8,3 est le plus grand car c'est pareil que 8,30 et 30 est plus grand que 26.*

Argument 3 : *8,3 est le plus grand car ils ont tous les deux 8 unités, mais 8,3 a 3 dixièmes alors que 8,26 n'en a que 2.*

Argument 4 : *8,3 est plus grand car* $8{,}3=8+\frac{3}{10}$ *et* $8{,}26=8+\frac{2}{10}+\frac{6}{100}$

Et il relance le travail en équipe en demandant maintenant de se prononcer sur ces arguments, toujours par écrit.
Enfin, il organise une confrontation collective.

Plus tard, il proposera de nouveaux couples de décimaux à comparer, avant de demander aux élèves de formuler une méthode qui permet de comparer rapidement deux nombres décimaux.

Je retiens de ce travail qui s'est étendu sur plusieurs séquences, trois termes qui me semblent importants dans l'enseignement des mathématiques, quel que soit le niveau de la scolarité obligatoire concerné (maternelle, école primaire ou collège) : problème, débat, erreur.

Problème

C'est le terme clé. La résolution de problèmes est à la fois le critère d'un apprentissage réussi (c'est quand on sait utiliser ses connaissances, de façon autonome, qu'on sait qu'on a appris), le moyen d'un apprentissage efficace (la résolution ou la tentative de résolution d'un problème inédit est un moment important pour l'apprentissage d'une connaissance nouvelle) et le moteur du déclenchement de cet apprentissage (par la nécessité de relever un défi).

Dans l'exemple présent, le problème est de formulation simple, sans habillage inutile. Il y a défi parce que la responsabilité de la résolution et de la détermination de la validité de la réponse est entièrement confiée aux élèves… ce qui n'interdira pas à l'enseignant de faire une synthèse des arguments valides, dans un langage approprié et en comblant quelques lacunes dans les arguments analysés : ainsi, l'argument selon lequel 8,3 est plus grand que 8,26 parce qu'il a plus de dixièmes n'est recevable que parce que 6 centièmes est inférieur à 1 dixième.

Débat

C'est un moment essentiel de l'activité. Il n'y aurait sans doute pas de mathématicien sans communauté mathématique… Instituer la classe, à certains moments, comme communauté mathématisante où l'on échange sur les résultats et sur les arguments, c'est permettre aux élèves de faire vivre leurs connaissances. Il est probable que certains élèves auront plus appris au cours de ce travail sur la signification de l'écriture décimale que sur la comparaison des décimaux, mais ils ne peuvent comprendre la procédure de comparaison que s'ils ont clarifié la signification de l'écriture décimale.

Erreur

De nombreuses études soulignent que enseignants et élèves ont l'erreur en horreur ! En témoigne la récente étude PISA qui montre notamment que, à 15 ans, les élèves français sont parmi ceux qui refusent le plus de répondre lorsqu'ils sont confrontés à des questions inédites : peur d'explorer et peur de se tromper ! Et, pourtant, tout enseignant de mathématiques devrait se souvenir de son passé d'élève (de « bon élève », souvent) et des difficultés qu'il a rencontrées, parfois en mathématiques, plus souvent dans d'autres domaines. Quand on est confronté au nouveau, on affronte l'inconnu et sa part d'ombre… Et donc, on erre et on se trompe. L'erreur est donc inévitable dans tout apprentissage, peut-être même est-elle nécessaire à certains d'entre eux !

Dans l'exemple précédent, certains élèves se sont trompés. Mais ce jour-là, parce qu'ils ont dû confronter leur réponse à d'autres différentes, parce qu'ils ont dû défendre leur point de vue, tenter de comprendre les arguments de leurs camarades… peut-être ont-ils plus appris que ceux qui savaient déjà !
Accepter de travailler avec et sur les erreurs des élèves me semble une condition de la réussite du plus grand nombre…, l'objectif étant évidemment

qu'au terme de l'apprentissage, les erreurs se soient estompées.

Quelle culture mathématique pour tous ?

Là se trouve sans doute la question essentielle. L'idée de culture mathématique est celle qui permet le mieux de caractériser ce que l'école doit permettre à chacun d'acquérir au cours de sa scolarité obligatoire, dans le cadre d'une culture commune. Mais celle-ci reste largement à définir, dans son contenu et dans ses modalités d'apprentissage.

A qui s'adresse cette culture commune ? A tous ! C'est-à-dire pas seulement à ceux qui se destinent ensuite aux filières d'enseignement général. Dans cette perspective, l'articulation Troisième - Seconde générale (qui ne concerne qu'une partie des élèves) ne peut pas être pensée comme l'articulation Ecole - Collège (qui, elle, les concerne tous).

Quel peut être le contenu de cette culture ? Je n'aurai pas la prétention de répondre seul à cette question. La réponse est affaire de débat collectif. Mais, à défaut de contenu précis, peuvent être esquissées quelques composantes de cette culture :

- des connaissances solides (faisant leur juste place aux outils modernes de traitement), socialement utilisables dans la vie quotidienne, par le citoyen lucide et prêtes à être enrichies pour des formations ultérieures ;
- une attitude face à des questions problématiques, dans laquelle le mot chercher a autant d'importance que le mot trouver, où l'originalité et l'initiative peuvent se manifester à côté de l'exigence d'une expression et d'une argumentation rigoureuse ;
- une pratique mathématisante qui permette à chacun d'appréhender ce pan du développement humain tendu vers l'étude d'objets conceptuels que l'individu mathématicien a lui-même construits et qu'il cherche maintenant à explorer, à mieux connaître, indépendamment de leurs utilisations[4]…, qui donne des occasions d'avoir une idée de ce qu'est l'activité mathématique, « *développant à la fois imagination et rigueur*[5] » ;
- quelques éléments d'histoire des mathématiques, aidant à prendre conscience que cette science est évolutive, vivante… et que des problèmes de formulation simple restent aujourd'hui encore des questions ouvertes.

A quelles conditions ?

Aménager l'existant est sans doute nécessaire. Mais, si on veut bien accepter que la scolarité obligatoire doit être également ouverte à chacun, quelle que soit son orientation future, il convient sans doute, pour le moyen terme, de procéder à une remise à plat et à une redéfinition des objectifs à atteindre. Cette idée d'une culture mathématique pour tous n'exclut nullement que certains puissent trouver des occasions d'aller plus loin dans une discipline qu'ils goûteraient particulièrement.

Donner aux enseignants les moyens de réussir une telle entreprise est une autre condition majeure. Elle implique d'abord que les opportunités de formation, notamment continue, soient rétablies. Elle suppose ensuite un environnement de travail amélioré, en particulier un temps avec les élèves moins compté qu'il ne l'est actuellement.

L'*audimaths* n'est pas le seul critère d'un enseignement mathématique qui réussit. Mais il en est un signe… Et il faut bien constater que, si les mathématiques sont parmi les disciplines préférées des élèves à l'école primaire et au début du collège, cette situation n'évolue ensuite pas dans le bon sens. Donner le goût des maths au plus grand nombre doit aussi être une de nos ambitions…

[4] … utilisations qui se révéleront peut-être un jour, montrant la « *déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature* » selon la formule utilisée par le physicien Eugene Wigner.

[5] Selon la formule empruntée au texte de membres de l'Académie des Sciences, dans leur réponse à Claude Allègre.