Huit points de vue
pour repenser son enseignement en mathématiques

Nicolas Rouche est un mathématicien belge, de l'Université de LOUVAIN-LA-NEUVE, qui, voici quelque vingt-cinq ans, « est tombé avec bonheur dans les questions touchant à l'apprentissage des mathématiques ». Peu après il a contribué à créer le C.R.E.M. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) belge, « officialisé » en 1993, qu'il a dirigé jusqu'en 2003.

En un grand nombre d'ouvrages, souvent copieux, publiés seul ou en équipe, Nicolas Rouche a toujours manifesté avec talent, l'art - et la science - de promouvoir des apprentissages constructifs des notions-clés des mathématiques du Collège ou des Lycées, voire de l'Ecole Elémentaire. Nous en recommandons fortement la lecture : il est difficile de trouver plus fondamental !

Les pages qui vont suivre livrent la quintessence de la réflexion de Nicolas Rouche sur des principes directeurs d'un enseignement des mathématiques dûment pensé. A chacun de nous de les éprouver et de les nourrir d'exemples.

I- Un enseignement réaliste

Convenons de dire qu'un enseignement de mathématiques est *vertical* s'il consiste pour l'essentiel à inculquer la théorie déductive aux élèves et ne se soucie pas des applications, des multiples liens que les mathématiques entretiennent avec le monde réel, physique ou social.

Convenons de même de dire qu'un enseignement est *horizontal* s'il consiste surtout à faire travailler les élèves dans des contextes du monde réel, physique ou social.

Ceci dit, le tableau ci-dessous schématise quatre façons d'enseigner les mathématiques.

Le tableau ci-contre est dû à A. TREFFERS. Voir à ce sujet H. FREUDENTHAL, *Revisiting mathematics education*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

Type d'enseignement	horizontal	vertical
mécaniste	-	-
structuraliste	-	+
empiriste	+	-
réaliste	+	+

Un enseignement où les élèves sont invités à étudier et appliquer des routines n'est ni vertical, ni horizontal. Nous le qualifions de *mécaniste*. L'enseignant dit : "Appliquez les règles que je vous ai données et remplissez ces colonnes de calcul."

Un enseignement où le professeur passe le plus clair de son temps à exposer des axiomes, des définitions et des théorèmes sans guère déboucher sur des applications, est avant tout vertical. Nous dirons d'un tel enseignement qu'il est *structuraliste*.

Considérons maintenant un enseignement où les élèves sont invités à explorer des questions concrètes pour y découvrir les mathématiques qui s'y trouvent cachées, mais où l'enseignant est peu soucieux de faire des synthèses qui montrent bien les théories sous-jacentes. Un tel enseignement est principalement horizontal. Nous dirons qu'il est *empiriste*.

Enfin nous qualifierons de *réaliste* un enseignement qui allie de façon équilibrée les registres horizontal et vertical. Le qualificatif *réaliste* est justifié du fait que les mathématiques "réelles" - celles que pratiquent les mathématiciens et les utilisateurs de mathématiques à tous les niveaux - ne se réduisent ni à de pures théories, ni à des explorations de contextes divers. Elles passent par d'incessants va-et-vient de la pensée entre théories et contextes.

Bien entendu, une telle classification des façons d'enseigner est extrêmement schématique. Jamais sans doute un enseignement effectivement dispensé n'est purement mécaniste, structuraliste, empiriste ou réaliste. Mais un tel schéma aide à comprendre les tendances d'un enseignement et à en parler, même s'il faut sans cesse le corriger et le nuancer.

II-Le sens étroit et le sens large

En mathématiques, chaque mot, chaque symbole possède un sens précis, celui qui est donné par sa définition. C'est le sens qu'il faut absolument respecter dans les raisonnements. Par exemple, un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits et les côtés opposés parallèles. Nous dirons qu'il s'agit là du *sens étroit*.
Mais chaque mot, chaque symbole possède aussi un *sens large*, fait de tout ce qu'il évoque, de tous les liens qui le rattachent à d'autres choses dans la mémoire et l'imagination. Par exemple, tout rectangle est divisé par ses médianes en quatre rectangles superposables et semblables au rectangle de départ ; il est divisé par ses diagonales en quatre triangles isocèles superposables deux par deux ; les parallélépipèdes rectangles ont six faces rectangulaires ; les prismes droits ont des faces latérales rectangulaires, etc.
Le sens large assure la mobilité de la pensée, la créativité, il permet de trouver des preuves. Le sens étroit assure la rigueur des raisonnements, il sert à contrôler les preuves. Le sens large est un animateur, le sens étroit un gendarme. Avec seulement le sens large, on fait plein de choses mais on divague et on se perd. Grâce au sens étroit, on maintient un cap.

III-Etudier les choses par familles

Souvent les propriétés d'une chose se comprennent mieux par contraste avec d'autres choses que lorsqu'on l'étudie isolément. Non pas d'autres choses sans lien avec elle, plutôt d'autres choses qui forment avec elle une famille structurée, avec des ressemblances - un air de famille -, et des différences. L'esprit circule alors d'une chose à l'autre, comprend les relations, reconstruit petit à petit la structure, et ainsi chaque chose trouve sa place dans un paysage ordonné. L'intelligence et la mémoire y trouvent leur compte. Mieux vaut donc étudier les choses par familles que l'une après l'autre, en une suite de monographies.

IV-Explorer, extraire, expliquer

Explorer. Dans une situation où on ne voit pas clair (c'est ça un problème), on se donne des exemples - qui marchent ou qui ratent -, on essaie de voir comment les choses se passent, de dégager des régularités, bref on explore un terrain plus ou moins vierge.

Extraire. Extraire (on a écrit extraire pour avoir un deuxième ex) c'est tirer du fouillis des choses qui vous passent par la tête l'un ou l'autre énoncé clair. Vrai ou faux, on ne sait pas, mais clair. C'est formuler une *conjecture*.

Expliquer. Enfin, expliquer, c'est montrer par raisonnement pourquoi la conjecture est vraie ou, le cas échéant, fausse. C'est, en prouvant, comprendre pourquoi ça marche comme on l'a cru (ou le contraire).
Un problème posé aux élèves peut comporter un, deux ou troix ex.

Explorer, extraire, expliquer (les trois EX) sont les trois registres essentiels de la pensée mathématique.
La règle des trois ex est tirée de SHERMAN STEIN, *Gresham's law : algorithm drives thought* (7), 1987, p. 2-4.

Exemple.
« Prouvez que la somme de trois nombres naturels consécutifs est multiple de 3. » Là il y a seulement *expliquer.*
« Je vous montre une dizaine d'exemples de sommes de 3 nombres consécutifs. Qu'observez-vous ? Justifiez votre réponse. » Là il y a *extraire et expliquer*.
« La somme de deux nombres consécutifs n'est jamais multiple de 2. Que penser de la somme de trois nombres consécutifs ? » Là il y place pour *explorer, extraire et expliquer.*

Sur les sommes de 3 nombres consécutifs qui sont multiples de 3 et d'autres questions analogues, voir N. ROUCHE, *L'arithmétique du petit Nicolas, ou qu'est-ce que penser mathématiquement* ? paru dans le Bulletin Vert n° 451

V-Ne jamais faire de rappels

Est-il bon de rappeler aux élèves auxquels on pose un problème, les éléments de théorie sur lesquels se base la solution ? Si on fait cela, c'est dans une bonne intention. C'est pour que chacun soit clairement au fait et ait de bonnes chances de résoudre le problème.

Mais c'est sans doute une maladresse dans la plupart des cas. En effet, rappeler aux élèves ce dont ils vont avoir besoin, c'est les priver d'aller chercher cela eux-mêmes dans leur mémoire, dans leurs notes, dans un livre. Or c'est une compétence essentielle que de savoir, face à une question, rassembler les éléments d'une solution. Aller chercher les informations là où elles se trouvent.

Bien entendu, si un élève, au cours de la résolution du problème, bute sur une difficulté insurmontable, alors il est encore temps de le dépanner, et il faut le faire !

Le précepte de ne jamais faire de rappel est - à notre connaissance - dû à JOSEPH STORDEUR.

VI-Le grand et le petit

L'homme perçoit bien les choses à sa mesure : les objets qu'il embrasse d'un coup d'oeil, les petites collections d'objets, les figures dessinées sur une feuille, ... La perception donne souvent, de ces choses à l'échelle humaine, une connaissance suffisante. Par contre, les choses très grandes ou les ensembles d'objets très nombreux sont perçus difficilement et défient l'imagination. C'est donc par le raisonnement qu'on arrive à les connaître mieux.

Quelle différence par exemple entre multiplier 3 par 2, et 237 par 78, entre dessiner un carré de 10 cm de côté dans son cahier, et dessiner un carré de 10 m de côté dans la cour de récréation, entre regarder une balle de tennis et voir ou imaginer le globe terrestre ? Un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est de donner à chacune et chacun accès aux choses grandes, aux grands nombres.

Une réflexion analogue porte sur les choses petites : les gouttes d'eau, les molécules, la vitesse d'un escargot, multiplier 0,000023 par 0,0000047, etc.

Plus généralement, l'être humain applique son intelligence à dépasser les limites, d'abord de ses perceptions, et ensuite de son imagination. Là se trouve l'origine de beaucoup de découvertes scientifiques. Et aussi la motivation de beaucoup d'apprentissages à l'école.

VII-Faire, se souvenir, parler, écrire

Les activités et la pensée de l'homme se développent dans plusieurs registres : les actions corporelles, les représentations imagées, le langage, la mémoire, etc. Lorsqu'on prépare une activité pour une classe, il est bon de se demander lesquels de ces registres on va mobiliser pour que les élèves apprennent le mieux possible.

Les gestes et les attitudes : par exemple, on peut compter avec ses doigts, montrer une ligne droite en marchant, montrer des parallèles avec ses bras, la gauche et la droite aussi avec ses bras, etc.

La mémoire : « va voir cela dans le fond de la classe, puis reviens à ta place et travaille (comme ceci ou cela) sur ce que tu as vu. » Faire appel à la mémoire, c'est en quelque sorte forcer les choses à « s'inscrire dans la tête ».

Le langage oral : par exemple, « explique à ton camarade la construction que tu as faite, pour qu'il puisse la refaire lui-même sans que tu la lui montres ». Les mots, même les mots enfantins, sont des moyens et des témoins de la conceptualisation. Les phrases sont des moyens et des témoins de la structuration de la pensée. Se mettre d'accord sur un langage commun, c'est-à-dire intelligible par les interlocuteurs, est la forme première d'objectivation de la pensée.

Le langage écrit : le langage écrit ajoute aux vertus du langage oral celle d'une exigence supplémentaire d'exactitude : voir le point de vue VIII ci-après.

Le dessin à main levée : « va voir telle chose dans le fond de la classe (ou chez toi, ou en ville) ; tu peux prendre un croquis; reviens ensuite à ta place travailler (comme ceci ou cela) à partir de ton croquis. » *Le dessin aux* *instruments* : les instruments sont eux-mêmes des figures géométriques dont l'usage passe par des mouvements. Il serait trop long de détailler ici l'intérêt de construire des figures en faisant exécuter à d'autres figures (les instruments) une succession de mouvements appropriés à l'objectif.

VIII-Ecrire des mathématiques

Tout symbole, toute égalité, équation ou formule doivent faire partie d'une phrase complète et y jouer le rôle de sujet, d'attribut ou de complément. Une formule isolée ne veut rien dire.

Il y un intérêt considérable à demander aux élèves de remettre des devoirs de mathématiques écrits en phrases complètes, commençant par une majuscule et se terminant par un point. Ils doivent pouvoir expliquer leur pensée mathématique en français. L'intérêt de cette pratique est surtout que les mots de liaison tels que les prépositions, conjonctions et certains adverbes (comme *parfois, toujours, jamais*, ...) sont les moyens d'expression principaux des relations logiques, sans lesquels les mathématiques n'existent pas. Des expériences significatives ont montré que des élèves soumis à l'obligation de rédiger tous leurs devoirs de mathématiques en phrases font de ce simple fait, dans cette discipline, des progrès remarquables. Bien entendu, cette recommandation ne s'applique qu'aux élèves qui ont atteint l'âge où ils savent écrire sans trop de peine.

Notons pour terminer qu'exprimer les mathématiques en français n'est pas une invention pédagogique : c'est une exigence de la pensée. C'est pourquoi tous les articles de recherche mathématique sont rédigés dans la langue commune.

Vous trouverez sur le site de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr) la conférence inaugurale de Nicolas Rouche aux Journées Nationales APMEP de 1994 ainsi qu'une liste de ses ouvrages et articles récents.