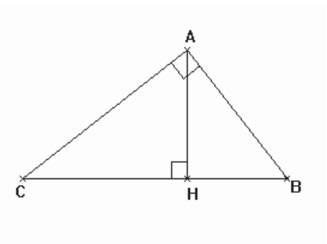
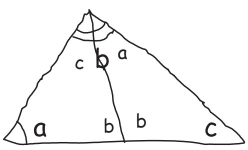
Pourquoi m'a-t-on caché ça ?

Michel Emery

Michel Emery a publié cet article dans la Bulletin Vert n° 346 de décembre 1984. Il était alors professeur à l'université Louis Pasteur à Strasbourg.





La hauteur d'un triangle rectangle le divise en deux triangles plus petits, semblables entre eux et au grand. L'aire du grand est évidemment la somme des aires des deux petits ; or, pour des triangles rectangles semblables, les aires sont entre elles comme les carrés des hypoténuses – donc le carré de l'hypoténuse du grand est la somme des carrés des hypoténuses des petits !

Cette démonstration magnifique, pourtant peu connue, du théorème de Pythagore, le déboulonne selon moi de son piédestal de pont-aux-ânes […] J'en veux un peu, rétrospectivement, à mes professeurs de seconde, première et math-élem, pourtant excellents, de ne pas nous l'avoir donnée comme remarque sur l'effet des similitudes sur les aires. Mais sans doute, tout comme moi jusqu'à une date récente, l'ignoraient-ils !

Voici, en quelques lignes, cette démonstration plus en détails, et quelques remarques.

Soit ABC un triangle rectangle en A, on appelle H le pied de la hauteur issue de A. Les triangles rectangles ABC, ABH et ACH ont leurs trois angles égaux, ils sont donc semblables entre eux.
Ainsi, le triangle ABC est un agrandissement des triangles ABH et ACH.
Posons $AC / BC = k$ alors : $\mathcal{A}_{ACH} / \mathcal{A}_{ABC} = k^2$, c'est à dire $\mathcal{A}_{ACH} / \mathcal{A}_{ABC} = (AC/BC)^2$, de même $\mathcal{A}_{ABH} / \mathcal{A}_{ABC} = (AB/BC)^2$.
Ce que M. EMERY exprime par « leurs aires sont comme les carrés de leurs hypoténuses ».
Comme $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ACH} + \mathcal{A}_{ABH}$, on a aussi : $\frac{\mathcal{A}_{ACH}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{ABH}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1$. En remplaçant par les trois hypoténuses et en réduisant, on obtient :

$$AC^2 + AB^2 = BC^2.$$

1. Si en 1984 il n'y avait plus beaucoup de place pour de la géométrie en 2nde, en 2003 par contre ceci peut certainement trouver sa place.
2. Il est tout aussi vrai que les aires sont entre elles comme les carrés des côtés qui se correspondent
3. On peut se poser la question d'un triangle quelconque partagé en deux triangles plus petits semblables entre eux et au plus grand…Qu'en est-il de ce partage ? Et là, la puissance de l'utilisation de lettres – ça n'est même pas vraiment encore du calcul littéral – est foudroyante..

a, b et c désignent les angles du grand triangle. On partage le grand triangle en deux triangles (en b par exemple). Par hypothèse, les trois triangles sont semblables. Ils ont donc les mêmes angles.
Pour le petit triangle de gauche, l'angle a est utilisé, donc on ne peut que placer l'angle c en haut et l'angle b en bas.
Les mêmes considérations dans le triangle de droite font à nouveau placer b en bas.

Et si les deux b font 180°, alors l'angle b est droit et le grand triangle est un triangle rectangle ...

Nos collègues italiens appellent cette propriété « théorème de Pythagore » et lui donne une place « scolaire » bien plus importante que chez nous.