De la nécessité de faire douter les élèves

Renaud Dehaye

Introduction

La rédaction d'une démonstration est un exercice souvent difficile pour nos élèves. Il semble utile de mener régulièrement un travail sur la conjecture, le contre-exemple et la valeur, au sens logique vrai-faux-indécidable, des propositions mathématiques pour comprendre les mécanismes d'un raisonnement.

Il faut mettre les élèves dans la position du scientifique qui s'interroge devant un obstacle. On rejoint la méthode suggérée par Gaston BACHELARD pour qui la connaissance scientifique se construit contre des opinions, des représentations qui lui font obstacle et qu'elle doit surmonter (G. BACHELARD : *La formation de l'esprit scientifique*).

Cette méthode s'inscrit dans le cadre de la formation du citoyen ; le rôle de l'enseignant en mathématique est aussi de développer l'esprit critique des élèves. Savoir douter et conjecturer est un objectif important dans l'enseignement de notre discipline.

Le travail suivant, mené en classe de seconde en début d'année, sous forme de deux devoirs à la maison, a pour but de faire réfléchir l'élève à la valeur, au sens vrai/faux, des propositions mathématiques.

Le but inavouable du premier devoir est de pousser les élèves à l'erreur en leur faisant étudier les formules d'Euler et de Fermat.

Pour la formule d'Euler, la majorité des élèves explore les valeurs $n = 0$ jusqu'à $n = 20$ et conclut que la formule fonctionne. Pour la troisième année consécutive, aucun élève n'a exhibé le contre-exemple : $E(41) = 41 \times 41$.

Ensuite, les définitions du mot conjecture données par les élèves sont plus ou moins utilisables : « *opinion fondée sur des probabilités* » (raccourci du Larousse), *« opinion fondée sur une hypothèse non vérifiée* » (on est sûr de rien !) ou encore *« hypothèse formulée sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ne connaît pas de démonstration* » (Robert).

On trouve dans le dictionnaire des sciences (Flammarion) la définition suivante :

« *Une conjecture est une proposition dont on cherche une démonstration. Quand cette démonstration est trouvée, la proposition cesse d'être une conjecture pour devenir un théorème* ». Cette formulation est plus accessible mais aurait-elle permis aux élèves de douter davantage ?

Il serait sans doute plus efficace de proposer une bonne définition dès le début pour que les élèves aillent plus loin dans leur recherche.

Pour la formule de Fermat, le degré de conviction des élèves diminue car seuls F(0), F(1), F(2) et F(3) sont des nombres accessibles. On peut lire dans les copies : « cette formule donne toujours des nombres premiers », « cette formule n'est pas parfaite » , « les nombres sont grands donc je ne peux rien dire ». Aucun élève n'a analysé F(4) même si c'était possible grâce au crible d'Eratosthène et à la liste des 100 premiers nombres premiers donnée en annexe du devoir.

Aucun élève n'a donné le contre-exemple $F(5) = 641 \times 670\,0417$, ce qui

Renaud Dehaye est professeur au lycée E. Héré à Lascou (54)

Vous pourrez consulter l'ouvrage de J.P. Dehaye « *Merveilleux nombres premiers* » était prévisible. (Ce nombre est cependant accessible avec une TI 89 qui le factorise en une poignée de secondes).

Il est intéressant de rappeler, pendant la correction, que c'est bien une conjecture qu'a proposé Fermat et qu'on doit à Euler la factorisation de F(5) en 1733, ce qui était très difficile à cette époque. Et que cette conjecture fut très hasardeuse quand on sait aujourd'hui que les nombres F(5) à F(30) sont tous composés.

Le contenu historique de ces conjectures offre l'occasion de faire découvrir le monde des mathématiciens et surtout celui des nombres premiers aux élèves. Occasion à ne pas manquer pour rappeler l'utilisation de l'arithmétique dans de nombreuses activités humaines.

Textes de Devoirs à la Maison donnés les 1er et 12 octobre

<u>*Exercice 1.*</u>

Léonhard EULER, mathématicien suisse (1707-1783), proposait la formule suivante pour obtenir des nombres premiers :

$\mathrm{E}(n) = n^2 - n + 41$, *pour n entier naturel.*

1. *Calculer E(n) pour n=0,1,2,3,4 et 5. Les nombres obtenus sont-ils premiers ?*
2. *Cette formule donne t-elle toujours des nombres premiers ?*

On pourra faire un tableau des valeurs de E(n) avec la calculatrice.

	Casio	*Texas*
Entrer la fonction E	*Menu Table*	*Touche Y =*
	Y1=X²-X+41	*Y1=X²-X+41*
Régler la table (valeurs de X)	*RANG* *Start : 0 (valeur initiale)* *End : 100 (valeur finale)* *Pitch : 1 (pas)*	*Touche TblSet* *TblStart : 0 (valeur init.)* *ΔTbl : 1 (pas*
Lire la table	*TABL*	*Touche Table*

<u>*Exercice 2.*</u>

Pierre de FERMAT (Toulouse 1601-1665), magistrat et « Prince des amateurs » en mathématiques, a conjecturé que $F(n) = 2^{2^n} + 1 \quad , \quad n \in N$,

est toujours un nombre premier.

1. *Définir le mot conjecture.*
2. *Calculer F(0), F(1), F(2) et F(3).*

Que pensez-vous de cette conjecture ?

<u>*Exercice 3*</u>

Un des exercices de ce devoir était l'étude d'une formule proposée par Marcel PAGNOL pour fabriquer des nombres premiers : « x et $x + 2$ étant deux impairs consécutifs, comme 5 et 7 ou 13 et 15, le nombre

$x + (x + 2) + x \times (x + 2)$ est premier ».

Le piège était plus facile à déjouer. 2 élèves sur 24 ont cru M.PAGNOL sans douter. Les autres ont exhibé des contre-exemples comme $9 + 11 + 9 \times 11$ ou $15 + 17 + 15 \times 17$.

Conclusion

Si certaines notions sont bien explicitées par les programmes, l'initiation au raisonnement et à la démonstration est plus implicite et n'est pas du ressort du seul professeur de mathématiques. Il doit cependant y prendre largement part.
On trouve dans le document d'accompagnement du programme de seconde un paragraphe « Rédaction, logique, notations » commençant par : « *Savoir rédiger est un objectif important en mathématiques ; il convient de faire comprendre à l'élève ce que rédiger veut dire et peut apporter.* »
A la question *démontrer que, pour tout x et y réels,* $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$, il n'est pas rare de trouver en première ou terminale une démonstration du type :

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2+4xy$

0 = 0 donc l'égalité est vraie.
Cela ressemble à une démonstration par équivalence, mais l'élève n'en a pas conscience.

Qui n'a jamais vu l'utilisation suivante de la réciproque du théorème de Pythagore :
Sachant que AB = 6, AC = 8 et BC = 10,
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
$6^2 + 8^2 = 10^2$
100 = 100 donc ABC est rectangle en A.
Dans les deux cas, l'élève utilise des outils mathématiques judicieux mais le raisonnement n'est pas satisfaisant.

Pour que les calculs ne prennent pas le pas sur la logique, le travail sur la conjecture et le contre-exemple doit être prolongé tout au long de l'année pour porter ses fruits. Les exercices de type vrai-faux-indécidable (avec justifications !) sont possibles avec toutes les notions du programme de seconde. Et ce sont souvent les élèves qui vous produiront les énoncés : « tout quadrilatère ABCD ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle ». Vrai, faux ou indécidable ? Justifiez.

Si vous avez des exercices permettant de faire réfléchir nos élèves sur un thème donné, tout comme l'a proposé cet article, merci de nous en faire part… nous en ferons profiter les lecteurs de PLOT dans un prochain numéro.