Décomposition d'un entier en somme de carrés

Marie-Christine Fouvry

Marie-Christine Fouvry est professeur au collège Alain-Fournier à Orsay (91)

Depuis quelques années, l'arithmétique est revenue au programme de 3ème. Ce chapitre plaît en général aux élèves, et suscite souvent un regain d'intérêt, même chez les élèves en difficulté. Ainsi, je crois qu'avec une calculatrice, tous mes élèves sont capables de trouver le PGCD de deux entiers par soustractions successives. Le retour de l'arithmétique en Terminale scientifique est aussi une incitation à utiliser ce domaine comme support d'activités.

Chaque année, je propose à mes élèves un devoir de recherche sur les nombres premiers : définition des nombres premiers, crible d'Eratosthène (comme cela est proposé dans leur manuel *cinq sur cinq*, Edition Hachette), décomposition en facteurs premiers, liste des diviseurs d'un entier à partir d'un arbre. Vous trouverez ce devoir sur le serveur de l'APMEP.

J'ai remarqué que les élèves préfèrent trouver le PGCD de deux entiers à partir de la liste de leurs diviseurs, plutôt que par soustractions successives. Rappelons que depuis la classe de 5ème, ils utilisent des décompositions d'entiers pour simplifier les fractions.

J'ai décidé de ne pas en rester là. J'ai invité un professeur de l'enseignement supérieur spécialiste de théorie des nombres à venir dans ma classe, pour y faire une intervention d'une heure. Quatre thèmes ont été abordés que je me propose de résumer.

Remarque : les élèves doivent avoir leur calculatrice pour mener à bien les activités proposées.

Les triplets pythagoriciens

Il semblait naturel de partir des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des triplets d'entiers (a,b,c), tels que : $a^2 = b^2 + c^2$. Le plus connu est évidemment le triplet (3 ; 4 ; 5) ; les élèves vérifient sans peine que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Comment en trouver d'autres ?
La propriété :
« Si m et n sont deux entiers tels que $m > n$ et si $a = m^2 + n^2$, $b = 2mn$ et $c = m^2 - n^2$ alors $a^2 = b^2 + c^2$ » est donnée aux élèves. Ils auront à la vérifier avec $m = 4$ et $n = 3$ puis à la démontrer à la maison.

Nombres premiers qui sont somme de deux carrés

Nous avons ensuite étudié le cas des nombres premiers qui sont somme de deux carrés. Le cas particulier du nombre 2 est bien sûr évident : $2 = 1^2 + 1^2$. Les élèves ont complété le tableau suivant, qui contenait les nombres premiers jusqu'à 101, en s'aidant de leur calculatrice.

Nombre premier impair	3	5	7	11	13	17	etc.
Somme de deux carrés, si elle existe		$5 = 2^2 + 1^2$			$13 = 3^3 + 2^2$	$17 = 4^2 + 1^2$	

Au bout de quelques exemples, le mathématicien a fait remarquer aux élèves que les nombres premiers impairs dont le reste dans la division par 4 est 1, et eux seuls, s'écrivent comme somme de deux carrés. Les élèves ont alors vérifié cette conjecture sur les nombres trouvés puis ont complété collectivement le tableau précédent jusqu'à 101. Il y a en tout 9 nombres premiers impairs à décomposer ; les élèves ayant trouvé une décomposition en font rapidement profiter les autres (les élèves un peu plus lents se contentent de vérifier).

Cette conjecture est un théorème très général : *Les nombres premiers impairs dont le reste dans la division par 4 est 1, et eux seuls s'écrivent comme somme de deux carrés.*

Il est dû à Fermat et possède un très grand nombre de démonstrations qui ne sont pas accessibles aux élèves de collège. On leur demande donc de l'admettre, ce qu'ils font sans mal, compte tenu du nombre d'exemples trouvés.

Nombres entiers qui sont somme de deux carrés

Ensuite, nous leur posons le problème de l'écriture d'un nombre quelconque, non nécessairement premier, en somme de deux carrés.

Nous vérifions que la condition sur le reste dans la division par 4 n'est ni nécessaire ni suffisante :

$20 = 4^2 + 2^2$ (reste 0)

$65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ (reste 1)

mais le nombre 21, dont le reste est 1, ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés.

Une nouvelle identité (que les élèves vérifieront en exercice à la maison) va permettre de relier ce problème au précédent :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(ay+bx\right)^2+\left(ax-by\right)^2.$$

D'après le théorème précédent, 5 et 41 ayant pour reste 1 dans la division par 4 s'écrivent comme somme de deux carrés ; on a $5 = 2^2 + 1^2$ et $41 = 4^2 + 5^2$.

En prenant a = 1, b = 2, x = 4 et y = 5 dans l'identité précédente, on obtient :

$205 = 5\times 41 = \left(2^2+1^2\right)\left(4^2+5^2\right)$

$205 = 13^2 + 6^2$.

La décomposition n'est pas unique car en prenant a = 1, b = 2, x = 5 et y = 4, on trouve aussi $205 = 5\times 41 = 14^2 + 3^2$.

Le théorème général qui intervient ici est : *Un entier supérieur ou égal à 1 s'écrit comme somme de deux carrés si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, les nombres premiers dont le reste dans la division par 4 est 3 n'apparaissent pas ou sont affectés d'un exposant pair.*

Il n'a pas été énoncé sous cette forme aux élèves, mais on leur a fait observer ce critère sur les exemples qui avaient été rencontrés.

Le théorème s'applique bien pour les nombres 20 , 65 et 205 car $20 = 2^2\times 5$; $65 = 5\times 13$ et $205 = 5\times 41$.

$27 = 3^3$ ne peut pas s'écrire comme somme de 2 carrés mais 45 le peut puisqu'il s'écrit $3^2\times 5$ ou $6^2 + 3^2$.

Là non plus, le théorème n'est pas démontré aux élèves.

Nombres entiers qui sont somme de trois ou quatre carrés

S'est alors posée naturellement la question : tout entier peut-il s'écrire comme somme de trois carrés ? de quatre carrés ?

Le théorème dit de Lagrange a été alors donné : « *Tout entier positif s'écrit comme somme de 4 carrés* ».

Les élèves ont trouvé les décompositions de certains nombres en somme de 4 carrés (ces décompositions sont rarement uniques) et ont constaté que 7 est le plus petit entier qui ne s'écrit pas comme somme de 3 carrés.

Par contre, 7 se décompose en somme de 4 carrés : $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$.

Pour le nombre 190, voici toutes les décompositions en quatre carrés, écrits en ordre décroissant :

$190 = 10^2 + 9^2 + 3^2 + 0^2$
$190 = 13^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2$
$190 = 12^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2$
$190 = 11^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$
$190 = 11^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2$
$190 = 10^2 + 8^2 + 5^2 + 1^2$
$190 = 10^2 + 7^2 + 5^2 + 4^2$
$190 = 9^2 + 8^2 + 6^2 + 3^2$

Le travail de recherche de ces décompositions a été entamé pendant la séance et terminé à la maison.

Conclusion

Je pense qu'un tel thème est attractif pour des élèves de troisième. Les miens ont été très actifs pendant cette séance, la présence d'un mathématicien professionnel s'intéressant à eux a été très valorisante. Ils ont pu aborder un domaine des mathématiques inhabituel, le dénombrement, et comprendre des énoncés de grands théorèmes, dont l'expression est plus complexe que ceux généralement rencontrés en troisième.
La calculatrice a permis à tous de chercher et de trouver des décompositions ; mêmes les élèves décrocheurs se sont investis, les calculs demandés étant à leur portée.

Il est clair que l'arithmétique regorge d'autres théorèmes aux énoncés compréhensibles par un élève de troisième et pouvant donner naissance à des vérifications à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.

Il faudra cependant veiller à ce que ces élèves ne se mettent pas en tête que le fait de prouver que « ça marche » sur une dizaine d'exemples permet de conclure que « ça marche tout le temps »…

Pour cela, on pourra proposer des situations pour lesquelles un contre-exemple vient prouver que ce qui semblait si bien « marcher » n'est pas généralisable.

Bibliographie

L'excellente brochure n°129 de l'APMEP : « *Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires* » de Mathieu Savin, permettra de retrouver toutes ces propriétés et bien d'autres. Prix adhérent : 6,85 €.
Une autre excellente référence recommandée aux étudiants abordant l'arithmétique est le très classique ouvrage intitulé *Introduction to the Theory of Numbers*, écrit par G. H. Hardy et E. M. Wright, publié par Clarendon Press (Oxford).

La plupart d'entre vous ont désormais la série complète des quatre numéros de PLOT ; nous sommes très fiers de ces couvertures pleines de lumière.
Avez-vous repéré l'anomalie qui s'est glissée sur la couverture du dernier numéro ?