PLOT numéro 106

A la découverte de l’algorithme d’Euclide
Classe de 3ème

ERRATUM : l'article d'Anne Marie Cavalier sur la recherche du PGCD paru dans PLOT3 est incomplet. Le voici dans sa version définitive.

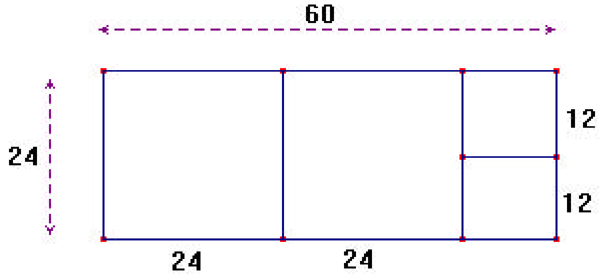
Au cours d’une première séance les élèves ont revu la division euclidienne et les notions de multiples et diviseurs d’un nombre.
On a rappelé les critères de divisibilité par 2, 3, 5, et 9 et recherché les diviseurs communs à deux nombres donnés.
Le PGCD a été défini et les élèves ont eu à rechercher le PGCD de deux nombres en établissant la liste des diviseurs de chacun d’eux.
L’activité qui leur est proposée ensuite doit leur permettre de trouver une méthode de recherche plus rapide du PGCD et donc de découvrir l’algorithme d’Euclide.
Les élèves ont travaillé par groupes de 2.

Activité
Des carrés pour paver des rectangles

Pour recouvrir un rectangle dont les dimensions sont des nombres entiers, on utilise des carrés en respectant les consignes suivantes :

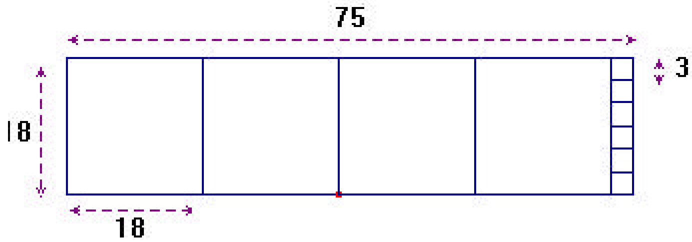
- On utilise le moins de carrés possibles et donc à chaque fois le carré le plus grand.
- Les carrés ne sont pas tous de même dimension.

Par exemple pour recouvrir un rectangle de 60 cm x 24 cm ; le plus grand carré mesure 24 cm de côté ; il reste alors un rectangle de 36 cm x 24 cm qu’on peut recouvrir encore par un carré de 24 cm de côté.
On poursuit la construction avec le rectangle restant dont les dimensions sont 12 cm et 24 cm.
On obtient la figure suivante :



Le dernier carré mesure 12 cm de côté.

Ou encore pour un rectangle de 75 cm x 18 cm on obtient la figure suivante :



Dans ce cas le dernier carré mesure 3 cm de côté.

1) Recouvrir en utilisant la même méthode chacun des 6 rectangles dont les dimensions sont données dans le tableau ci-dessous.

Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Rectangle 4	Rectangle 5	Rectangle 6
15 x 12	110 x 70	105 x 132	176 x 160	429 x 156	1078 x 322

Quelle est dans chaque cas la longueur du côté du plus petit carré ?
Quelles remarques peut-on faire sur la dimension de ce dernier carré ?

2) Décrire la méthode utilisée pour trouver la dimension du dernier carré.

3) Peut-on recouvrir chacun des rectangles ci-dessus avec des carrés les plus grands possibles ayant tous la même dimension ?

<u>Commentaires :</u>

Les élèves n'ont pas tout de suite compris les consignes ; ils ont refait la construction pour les exemples donnés en choisissant le millimètre comme unité, puis ont construit le rectangle1 en utilisant les petits carreaux de leur cahier ; pour le rectangle 2 ils ont construit un rectangle de 11 cm x 7 cm.
Pour les rectangles suivants, certains groupes ont commencé à effectuer des calculs, d'autres ont poursuivi les constructions en essayant de construire des figures dans une échelle plus petite.
Très rapidement tous les groupes ont reconnu le PGCD dans la dimension du dernier carré et certains ont préféré effectuer la recherche des diviseurs plutôt que de faire la construction.

La mise en forme du procédé de calcul a été plus difficile à expliciter ; les élèves ne pensent pas à présenter leur réponse sous forme d'un tableau, mais dans tous les groupes l'algorithme a été mis en évidence soit par des soustractions successives, soit par des divisions euclidiennes.

Une mise en commun a permis à chacun de comprendre les deux procédés.
Les 2 séances suivantes ont eu lieu en salle informatique, les élèves ont utilisé le tableur pour calculer le PGCD de deux nombres et ils ont pu ainsi comparer les deux méthodes.

<u>Conclusion :</u>

Dans les manuels de 3ème la recherche du PGCD est présentée de façon peu convaincante ; le passage « PGCD (a ; b) = PGCD (a-b ;b) (lorsque a >b) » paraît artificiel et les élèves effectuent mécaniquement la recherche du PGCD de deux nombres.

Par contre cette activité leur permet de donner du sens à l'algorithme de recherche ; la résolution de petits problèmes de pavage est plus aisée car tous concluent rapidement que le dernier carré permet de paver tout le rectangle.

Aucun élève ne s'est interrogé sur la construction : Est-elle toujours possible ? Existe-t-il des rectangles pour lesquels elle ne s'arrête pas ?
On peut prévoir pour susciter cette réflexion une activité sur le rectangle d'or et envisager peut-être une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Bibliographie :

Bulletin APMEP N° 433.
Repères IREM N° 46 p 27 à37
Faire des Mathématiques au collège avec un tableur. IREM de Rennes.