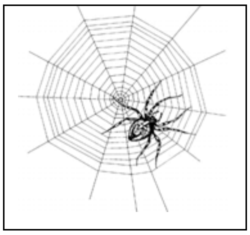
Faire Maths de tout bois

Henri Bareil,

en collaboration avec Christiane Zehren

Voici la seconde partie de l'article d'Henri Bareil. Vous trouverez l'introduction et la partie A dans le précédent PLOT (106/3), page 2 et suivantes.



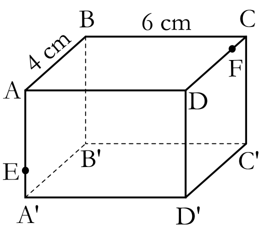


fig. 21

B – DE L'ÉCOLE AU COLLÈGE

Le Collège fait passer de la « géométrie physique » de l'école élémentaire à une géométrie plus spéculative, cependant que l'outil algébrique supplante des raisonnements moins formalisés.

Que deviennent alors les méthodes de l'école élémentaire ?

I. Mesurer pour prouver ?

A l'école élémentaire, les « mesurages » sont décisifs. Au Collège, changement d'optique : « Mesurer n'est pas démontrer ».

Allons-nous « jeter » pour autant les « mesurages » ?

RÉPONSE 1 : Sûrement pas ! Ils aideront au moins à **conjecturer**, ce qui est très important.

RÉPONSE 2 : On demande des calculs de longueurs, d'angles, … Des « mesurages » au double décimètre, au rapporteur, permettront de **contrôler**, et, le cas échéant, de le faire pas à pas pour de longs calculs …

Mais il y a mieux :

RÉPONSE 3 : « L'araignée et sa voie sur un « pavé droit ».

Problème : *Quel est le plus court chemin de E en F en restant sur la surface du pavé ?*

Les chemins les plus courts sont rectilignes sur des développements (des « patrons ») du pavé.

Attention : les « mises à plat » sont diverses et induisent plusieurs chemins. Supposons cette étude faite « avant le théorème de Pythagore » : les chemins sont-ils comparables par des mesures au double-décimètre (« mesurages ») ?

Cas 1 : Soit AA' = 4 cm et A'E = CF = 1 cm.

- Un chemin traverse [AD]. Par « mesurage » : EF ≈ 8,5 cm (calcul : 8,485…)

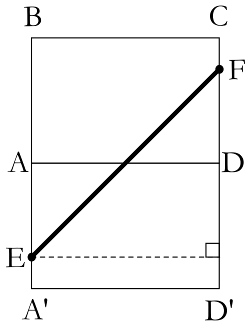


fig. 22

- Un autre chemin traverse [DD']. Par « mesurage » : EF ≈ 9,5 cm (calcul : 9,487…)

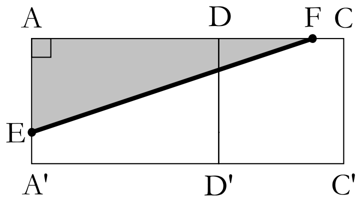


fig. 23

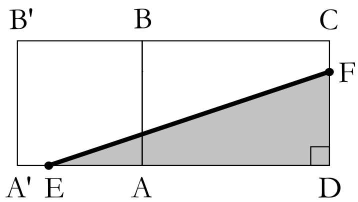


fig. 24

- Un autre chemin traverse [AB]. Même mesurage et calcul qu'avec [DD']. (les triangles sablés sont superposables).

- Les autres chemins rallongent manifestement.

Cas 2 : Soit AA' = 7 cm, AE = 5,5 cm et CF = 1 cm.

Cette fois les deux premiers chemins donnent des mesurages très voisins (calculs :EF ≈ 10,40 et EF ≈ 10,55).
Que conclure ?

- Dans le premier cas, la différence entre les mesurages 1 et 2 dépasse largement les approximations. Après débat, il y a lieu d'accepter leurs conclusions : **les mesurages prouvent**.

- Dans le deuxième cas, un débat doit faire conclure à **l'impossibilité de décider avec des mesurages :**

Faute de théorème de Pythagore, utilisons sur un même dessin deux rabattements différents de DFC : en D, F_1, C_1 pour le premier et en D, F_2, C_2 pour le second (Cf. figure)

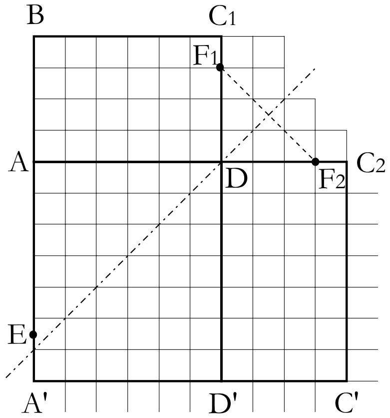


fig. 25

Comparer EF_1 et EF_2 se fait avec le régionnement du plan par la médiatrice de $[F_1F_2]$: *le quadrillage est fort utile pour situer la médiatrice et E.*

D'où : $EF_1 < EF_2$.

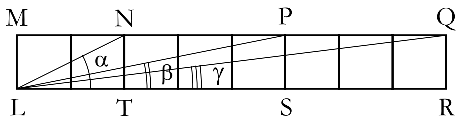
II.Quadrillages

Ils sont très utiles pour contrôler un dessin de droite (Cf. ci-après), reporter des longueurs, construire des parallèles, des perpendiculaires, des points partageant un segment dans un rapport donné (dont les milieux) …

Les quadrillages peuvent être un outil pour démontrer. Ainsi, par exemple :

DÉMONSTRATION DU « THÉORÈME DES HUIT CARRÉS » qui concerne la somme :

$$\widehat{NLT} + \widehat{PLS} + \widehat{QLR}.$$



« Les huit carrés » constituent le rectangle MLRQ.

Le quadrillage peut servir de support à un report exact des angles de façon à former leur somme (Cf. II du A, voir PLOT n° 3). Les angles sont caractérisés par leurs tangentes, (Cf. figure ci-dessous) en utilisant BF = 2CF ; BE = 5FE ; AB = 8AC. D'où une somme égale à 45°.

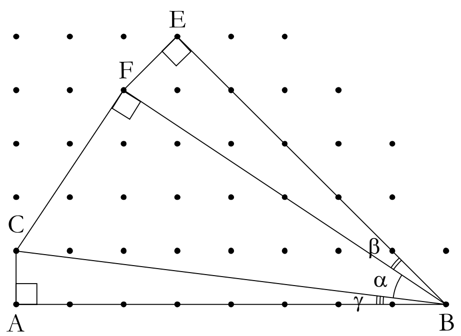


fig. 27

Version plus facile : un « Théorème des trois carrés »

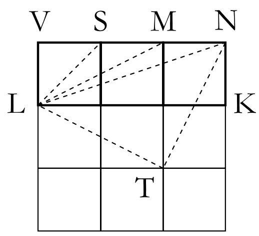


fig. 28

« Les trois carrés » constituent le rectangle LKNV.

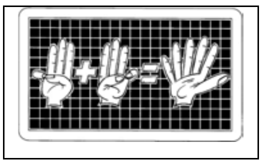
Que vaut : $\widehat{SLK} + \widehat{MLK} + \widehat{NLK}$?

$$\widehat{SLK} = 45°$$

$$\widehat{MLK} = \widehat{TLK}$$

$$\text{et } \widehat{MLK} + \widehat{NLK} = \widehat{TLN}.$$

Or le triangle TNL est rectangle isocèle. Donc …



démontrer avec un quadrillage ?

III. Des « mises en équation »

Il s'agit là d'un outil puissant mais qui ne doit pas, pour autant, interdire d'autres pratiques à l'occasion de problèmes.

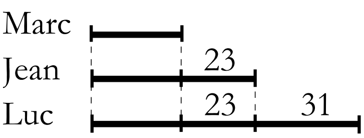
EXEMPLE 1 : *« Un enfant a acheté 10 sucettes, toutes au même prix. Si chaque sucette avait coûté 5 centimes de moins, il y en aurait eu deux de plus pour le même prix total. Quel est le prix d'une sucette ? »* (Exercice proposé en EVAPM Seconde 1999).

Faut-il se précipiter pour une traduction « avec *x* » ?

Sur 10 sucettes, voilà 50 centimes d'économisés pour en payer deux. Le prix, après réduction, serait donc de 25 centimes. D'où un prix réel de 30.

EXEMPLE 2 : *« Jean a 23 ans de plus que Marc et 31 ans de moins que Luc. La somme des trois âges est 199 ans. Quels sont-ils ?*

Une mise en équation peut se faire, autrement qu'avec des lettres, par un schéma (où l'âge de Marc sera l' « inconnue »). Par exemple :



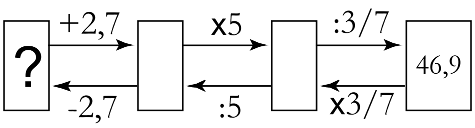
Donc, en années,

âge de Marc $\times 3 = 199 - (23 + 23 + 31)$

Etc.

EXEMPLE 3 : *« Tu prends un nombre, tu ajoutes 2,7 puis tu multiplies par 5 puis tu divises par 3/7. Tu me dis trouver 46,9 et tu me réclames le nombre de départ ».*

Il suffit d'appliquer le principe du trajet inverse :



En posant $\left[(x+2,7)\times 5 : \frac{3}{7}\right] = 46,9$, la « méthode algébrique » :

-ou bien décortique les « enveloppes » de *x*, à l'égal du trajet inverse :

$\left[(\cdots)\times 5\right] = 46,9 \times \frac{3}{7}$ puis (…),

puis $x = \ldots$

- ou bien propose carrément *une démarche nouvelle* par réduction du premier membre.

C- DES OUVERTURES

I. Rendre des évidences étonnantes

Les isométries conservent ceci et cela . Pour les élèves, cela va de soi et risque de leur paraître sans intérêt !

⌘ Essayons de donner à ces conservations tout leur sel en présentant, dès **la sixième**, **des « transformations » qui « transforment vraiment ».** Un logiciel de géométrie sera un excellent outil pour proposer, par exemple :

- des **conchoïdes*** de droites ou de cercles (1)
- l'image d'une droite par une **inversion** (2)
- une **symétrie par rapport à un cercle** (3)
-etc.

Pour (1), les définitions sont classiques et les résultats titillent (Cf. brochure APMEP n° 202) ;

Pour (2), encore plus classique, les droites deviennent des cercles (sauf …) ;

Pour (3), voici une définition et un exemple : un carré circonscrit au cercle de référence aura pour image un trèfle à quatre feuilles.

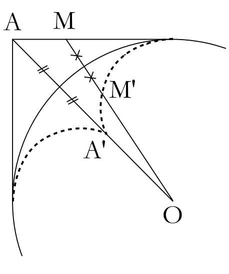


fig. 29

* *Conchoïde : voir en annexe.*

⌘ On peut s'interroger alors, avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique sur ce que deviennent les longueurs, les angles, les aires.

⌘ Il n'est pas jusqu'à l'exemple de la symétrie oblique qui ne soit apparemment curieux : elle ne conserve pas les longueurs, mais elle conserve les aires !

N.B. **Ceci est-il hors programme ?**
- « Hors compétences exigibles », oui !
- « Hors activités en classe (ou à la maison », non ! Ne s'agit-il pas de valoriser, par opposition, des savoirs exigibles ?

II. Généraliser

En demandant aux élèves de chercher d'abord…

EXEMPLE 1 :

Reprenons l'exemple 3 du $\boxed{\text{A}}$ IV([1]), … en **desserrant un peu la contrainte** des « entiers consécutifs »… par exemple en remplaçant par « des multiples de 3 (ou de *n*) consécutifs ».

EXEMPLE 2 (Cf. figure) *Démontrer que D, E et F sont alignés.*

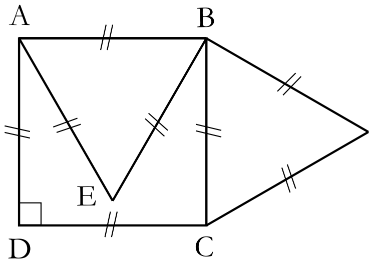


fig.30

Il existe de nombreuses façons de le faire, par exemple :

- l'une en calculant $\widehat{AED}$ et $\widehat{BEF}$, d'où $\widehat{DEF}$;

- une autre par la rotation (B, F → C, d'angle 60°) par laquelle E → A cependant que D est envoyé en D' tel que D'DB soit équilatéral, donc D' est sur la médiatrice (AC) de [DB] ;…

- Essayons maintenant de **desserrer la contrainte ABCD carré** tout en ayant toujours en vue l'alignement de D, E, F.

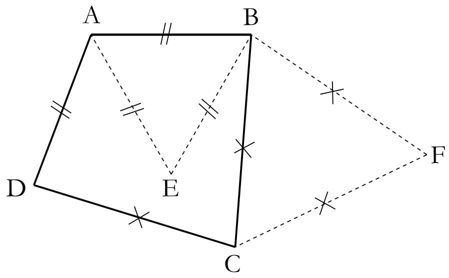


fig.31

L'utilisation de la rotation montre qu'il suffit que A et C soient sur la médiatrice de [BD].

EXEMPLE 3 :

Cf. figure 32 où A et B sont définis par (MA)//Δ' et (MB)//Δ, Δ ⊥ Δ', [avec M sur le cercle (O, R), A sur Δ, …]

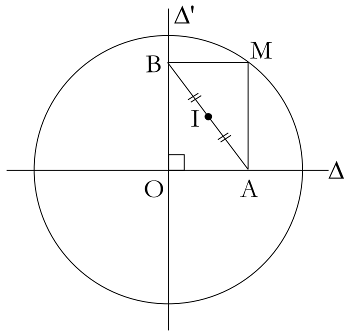


fig. 32

Lorsque M décrit le cercle, quel est le lieu de I milieu de [AB] ?

OAMB est un rectangle, donc I est aussi le milieu de [OM], d'où OI = R/2, etc.

Mais la propriété utilisée vaut pour tout parallélogramme OAMB.

L'hypothèse Δ ⊥ Δ' est donc inutile. Sa suppression n'a aucun effet.

Par contre, si A et B avaient été définis comme les projetés orthogonaux de M sur Δ et Δ', la suppression de Δ ⊥ Δ' créerait un problème tout différent… : le recours à un logiciel suggérerait que le lieu de I est alors une ellipse, ce que pourrait confirmer une documentation… Le cas Δ ⊥ Δ' apparaîtrait alors comme un cas particulier où l'ellipse du cas général est un cercle.

[1] **A.IV. Exemple 3. Plot n°3, page 7**.

Sur le modèle de $3^2 + 4^2 = 5^2$, compléter si possible :

$\square^2+\square^2+\square^2 = \square^2+\square^2$
Etc, en ajoutant chaque fois un terme aux deux membres, les divers nombres, de gauche à droite étant des entiers consécutifs.

III. Environnement, Bibliothèques et Logiciels

Notre environnement nous propose des courbes, des surfaces, des informations graphiques et numériques… qui peuvent éveiller la curiosité des élèves et leur intérêt.

Cela ne peut être que bénéfique pour l'enseignement des maths.

Restera à trouver à ces élèves un minimum de documentation (Par exemple la brochure APMEP n° 203 : « *Au-delà du compas, la géométrie des courbes* »).

Il en est de même des logiciels de géométrie dynamique et tout ce qu'ils peuvent suggérer (Cf. alors les brochures APMEP n° 124 et 125 de Roger Cuppens).

L'usage des logiciels peut modifier les problèmes :

Ils vont fournir simultanément des **dessins** de lieux et, au moins par essais-rectifications, très vite, des configurations-clés dont la « construction » est demandée.

Se trouve alors posée la question du statut des réponses (et l'on rejoint le § B,I). Ainsi :

- pour l'exemple 2 du § A, 1([1]), Cabri me donne aussitôt, par essais-rectifications, le **dessin** d'un triangle solution ABC et, en demandant d'autres solutions, on voit se succéder des points A qui semblent alignés. Mais, le sont-ils ?

- pour l'exemple 3 au § A,II ([2]), des essais-rectifications donnent le dessin d'un point M censé être solution (mais qu'on ne saura pas situer « exactement »). Si l'on réclame les mesures des angles $\widehat{AMB}, \widehat{AMC}, \widehat{BMC}$, Cabri les affiche très proches de 120°. Ces angles seraient-ils égaux à 120° ?

Nous avons donc :
- d'une part des réponses rapides en fait de dessins,
- d'autre part une incitation à aller plus loin en explicitant le pourquoi, en précisant par des démonstrations…

([1]) PLOT n° 106/3 page 3.

(Construire un triangle ayant pour médiatrices trois droites concourantes imposées.)

([2]) PLOT n° 106/3 page 4.

(Triangle ABC acutangle, chercher M tel que MA+MB+MC soit minimale.)

IV. Utiliser des documents

La recherche et l'utilisation de documents devraient être, en mathématiques comme ailleurs, un **élément-clé de toute formation**. C'est plus vrai que jamais avec les multiples sites Internet.

Un élément-clé ? Il ne faut donc pas le circonscrire à des heures marginales, mais y éduquer d'abord dans l'horaire normal !

Initialement les coups de pouce peuvent être utiles, mais sans les substituer par trop aux élèves.

Je vais prendre un exemple de concours de droites, ce qui sera facilement conjecturable avec des logiciels de géométrie dynamique, mais comment le prouver ?

La géométrie très élémentaire procure divers moyens, mais il est possible de décupler ces moyens grâce au théorème de Céva.

Nous devrions féliciter les élèves qui rechercheraient des moyens de dire s'il en va bien ainsi et le feraient en utilisant par exemple *Publimath* et ses mots-clés ou d'autres sites internet ou des livres d'une bibliothèque maths.

Pourquoi ne pas les inciter à de telles recherches ?

Cette utopie d'aujourd'hui ne devrait-elle pas être une réalité de demain, capable de fortifier le goût des mathématiques en permettant de se mouvoir dans un univers riche ?
Capable aussi de mettre en jeu de façon réelle, dans les cours de mathématiques « normaux », **le quatrième « moment »** (« se documenter ») **essentiel dans toute formation scientifique moderne.**

EXEMPLE :

Cf. figure du triangle ABC avec son cercle inscrit.

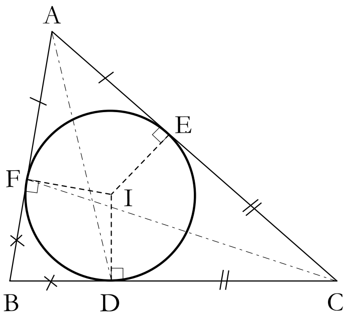


fig. 33

Les droites (AD), (BE), (CF) semblent concourantes. Or BD = BF etc. Si, sur documents, nous avons découvert la réciproque du théorème de Céva, essayons-la simplifiée, sans mesures algébriques, pour les droites coupant, à coup sûr, comme ici, les segments-côtés d'un triangle :

$$\frac{DB}{DC}\times\frac{FA}{FB}\times\frac{EC}{AE}$$

se simplifie en 1 puisque DB = FB, etc .

Les droites sont donc concourantes…

Remarque 1 : La réciproque du théorème de Céva permet d'unifier les « pourquoi » des médianes concourantes, bissectrices concourantes, hauteurs concourantes…

Médianes : comme ci-dessus avec chaque quotient égal à 1.

Bissectrices : On sait (Cf. A II exemple 4) que, avec (AD), (BE), (CF) bissectrices d'un triangle ABC :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC},\ \frac{EC}{EA}=\frac{BC}{BA},\ \frac{FA}{FB}=\frac{CA}{CB}.$$

Donc : $\dfrac{DB}{DC}\times\dfrac{EC}{EA}\times\dfrac{FA}{FB}=1.$

Hauteurs : Soit un triangle ABC de hauteur AH.

■ Sans angle obtus,

$$HB = c\cos\widehat{B} \text{ et } HC = b\cos\widehat{C}$$

et $\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{c\cos\widehat{B}}{b\cos\widehat{C}}.$

De même : $\dfrac{KC}{KA}=\dfrac{a\cos\widehat{C}}{c\cos\widehat{A}}$

et $\dfrac{LA}{LB}=\dfrac{c\cos\widehat{B}}{b\cos\widehat{C}}$

et la réciproque « réduite » s'applique.

■ Avec un angle obtus, $\widehat{B}$ par exemple, on a recours à la forme générale avec :

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}=\frac{-c\cos\widehat{B}}{b\cos\widehat{C}};\ \frac{\overline{KC}}{\overline{KB}}=\frac{-a\cos\widehat{C}}{c\cos\widehat{A}};$$

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}}=\frac{b\cos\widehat{A}}{-a\cos\widehat{B}}.$$

Quant aux *médiatrices*, comme elles sont hauteurs du triangle dit « complémentaire » formé par les milieux des côtés…

Une telle unification n'est-elle pas euphorisante ?

REMARQUE 2 : Un énoncé - aménagé - d'Olympiades Mathématiques de Première 2003 (Brochure APMEP n° 158 - Académie de Créteil page 81)

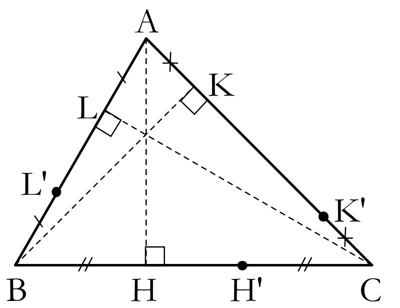


fig. 34

ABC est un triangle acutangle avec :

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{H'C}$$

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{K'C}$$

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{L'B}$$

Démontrer que (AH'), (BK') et (CL') sont concourantes.

Dans le cadre des programmes, la démonstration est fastidieuse. Elle est immédiate avec les théorèmes de Céva :

Direct : (AH), (BK) et (CL) sont concourantes (hauteurs de ABC). D'où $\dfrac{HB}{HC}\times\dfrac{KC}{KA}\times\dfrac{LA}{LB}=1.$

Le théorème de Céva

Soient un triangle ABC, D sur (BC), E sur (CA) et F sur (AB).

Si les droites AD, BE , CF sont concourantes, alors :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$

Le théorème réciproque est vrai.

Théorème « réduit » : soient un triangle ABC, D sur [BC], E sur [CA] , F sur [AB].

Si les droites AD, BE, CF sont concourantes, alors

$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1\ .$$

La réciproque est vraie.

Or, $\frac{HB}{HC} = \frac{H'C}{H'B}$ etc. et il suffit d'appliquer le théorème réciproque.

Cela donne une activité rapidement efficace, séduisante, agréable, donc propre à faire aimer les maths au lieu de les en dégoûter…

N'est-ce pas là un but primordial ?

A, B, C, CONCLUSION GÉNÉRALE

Des objections…et…des réponses

- *Nos élèves sont trop faibles pour se passer de béquilles.*
- Oui ? Ils ne sauront jamais marcher seuls ? Ne soyons pas pessimistes… Habituons-les à avoir de moins en moins de béquilles, à compter d'abord sur eux-mêmes… L'esprit d'initiative, cela se cultive !

- *Nos élèves n'ont ni le sens, ni le goût de l'effort.*
- Ils n'ont quelques chances de les acquérir – et c'est indispensable – que par la joie de **succès personnels** et d'un contact **plaisant** avec des mathématiques **riches**.

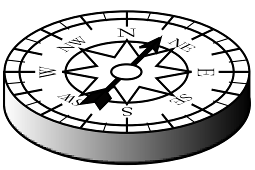
- *Les programmes insistent sur les contenus.*
- Pour progresser, les méthodes-clés sont plus indispensables que les contenus, qui sans elles, ne sont que des coquilles vides ! Et une bonne documentation aidera à mobiliser les contenus !

- *Le temps nous est limité.*
- **Oui**, mais raison de plus pour se centrer sur l'essentiel capable de mobiliser les élèves et de solliciter au maximum leur intelligence et leur initiative … donc aussi leur effort. Et alors, que de temps gagné !

Une boussole et un cap

Les « huit moments » d'une formation scientifique évoqués dans l'introduction, ayons-les bien en vue.

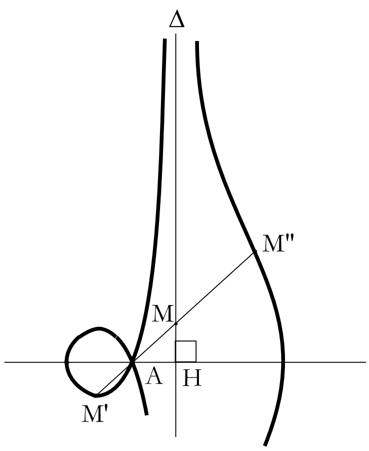
« Pour celui qui n'a pas de cap, il n'est pas de vent favorable ».



Pour celui qui n'a pas de cap, il n'est pas de vent favorable.

ANNEXE

EXEMPLE DE CONCHOÏDE



Δ et A donnés, M variable sur Δ, on porte sur (MA), de part et d'autre de M, *une longueur constante a*.

D'où deux points M' et M″ dont le lieu est *une conchoïde de la droite* Δ. Lorsque a > AH, ce qui est le cas ici, la conchoïde présente une boucle avec un « point double » en A.

La brochure APMEP n° 202 donne (page 44) les équations cartésienne et polaire d'une conchoïde de droite et, page 35, une conchoïde de cercle dite « Limaçon de Pascal ».

BIBLIOGRAPHIE

Vous trouverez une importante bibliographie concernant les éléments évoqués dans cet article sur le site de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr/PLOT).