

# Les triangles isométriques en classe de seconde à partir des *Eléments* d'Euclide

Véronique Cerclé

Cet article de Véronique Cerclé (professeur au lycée Jean Moulin de Pézenas) propose un résumé de deux séances (deux fois 1 heure) menées avec des élèves de seconde dont l'objectif est de profiter du chapitre sur les triangles isométriques pour faire découvrir aux élèves un des textes les plus importants de l'histoire des mathématiques, les *Eléments* d'Euclide. Vous trouverez sur le serveur <http://www.apmep.asso.fr> les extraits des *Eléments* distribués aux élèves.

J'avais appris au collège, tout comme une génération d'élèves, l'axiome d'Euclide : « Par un point il ne passe qu'une parallèle à une droite donnée », utilisé pour démontrer des alignements de points.

Depuis, Euclide et ses axiomes ont disparu des programmes ; pour l'anecdote, deux candidats pourtant brillants au Jeu des *Mille euro catégorie spécial jeunes* ignoraient jusqu'à ce nom.

Désormais, les élèves de troisième utilisent l'algorithme d'Euclide - en arithmétique (à propos, je doute qu'ils voient le lien entre les calculs magiques qu'ils font et la signification concrète du PGCD). Mais qui, parmi nos élèves de lycée, connaît ou a entendu parler des *Eléments* d'Euclide ? Pourtant depuis leur écriture vers - 300 ces treize livres ont engendré une abondance de traductions et de commentaires ! Il s'agit de l'ouvrage qui a connu le plus grand nombre d'éditions (après la Bible) jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle, sans compter le grand nombre de manuscrits conservés ! Il fut pendant des siècles le manuel de base du mathématicien !

C'est en parcourant par hasard « *Mathématiques et mathématiciens* » de Dédrion et Itard que je suis tombée sur les premières pages de ces *Eléments*,

dans lesquelles on trouve une démonstration traitant de triangles isométriques. J'ai donc entrepris d'en savoir un peu plus puis de préparer une activité de rencontre de cet ouvrage essentiel avec mes élèves de seconde.

## Première séance

(1 heure ou plus si l'on souhaite s'étendre sur le personnage d'Euclide)

J'ai d'abord présenté le personnage Euclide aux élèves et décrit l'impact des *Eléments*.

Je leur ai alors montré l'architecture de l'œuvre, en leur faisant lire le début et remarquer que :

- Euclide commence par donner des définitions (*un point est ce dont la partie est nulle...*), des postulats (séparés des définitions car nécessaires mais moins immédiats) et des "notions communes" (*les choses égales à une même chose sont égales entre elles...*, phrases que nous citons d'ailleurs maintenant régulièrement lors des résolutions d'équations par exemple) ;

- à partir de cette série d'énoncés de base, Euclide déduit toutes les autres propositions dans une construction rigoureuse (il s'agit donc d'un modèle axiomatique-déductif). Ainsi le Premier livre se termine par la démonstration du



théorème de Pythagore (proposition 47) et sa réciproque (proposition 48).

Nous avons travaillé ensemble la première proposition, en contrôlant les justifications données par Euclide à chaque étape.

Les élèves ont alors dû chercher à la maison les justifications de la proposition 2, que j'avais préalablement supprimées. Je leur ai aussi demandé (facultatif) de démontrer "à la manière d'Euclide" la proposition 3. Pour préparer le cours sur les cas d'égalité de triangle, je leur ai fait construire des triangles de mesures données.

### Deuxième séance (1heure)

A partir de la comparaison des triangles construits par les élèves, nous avons débattu sur les types de données conduisant à des triangles superposables : les trois cas d'égalité de triangles se sont dégagés, à savoir : « trois côtés », « deux côtés et l'angle entre ces côtés » et « un côté et les deux angles adjacents ». Il restait à démontrer cette intuition qui ne s'appuyait que sur « on voit bien que... » !

Nous sommes donc revenus à Euclide : la proposition suivant celles déjà étudiées, c'est-à-dire la proposition 4, prouve le « deuxième cas » ; nous avons donc attentivement étudié sa démonstration. Je leur ai fait ensuite remarquer que le « troisième cas » est démontré peu après (proposition 8), le dernier arrivant plus tard (proposition 26) car il nécessite des outils à démontrer préalablement.

### Bilan :

Je pense tout d'abord avoir maladroitement présenté ce travail : je n'ai pas expliqué les objectifs de cette activité et certains élèves se sont apparemment interrogés sur son but. J'avais aussi sous-estimé la difficulté des élèves à entrer dans la langue d'Euclide : « *Au début nous ne savions pas où la prof voulait en venir. Nous ne saisissions pas très bien ses explications* ». Il aurait sans doute fallu que je prenne le temps de mieux leur

expliquer les diverses motivations de cette activité.

Mais je pense avoir tout de même obtenu quelques points positifs :

- concernant le chapitre « triangles isométriques », nous avons démontré deux des trois cas induisant l'isométrie de triangles.
- concernant la notion de démonstration, montrer aux élèves la rigueur qu'Euclide s'est imposée leur a peut-être mieux fait accepter la rigueur que je leur demande dans leurs démonstrations ainsi que la nécessité de pouvoir justifier chaque étape par des vérités acquises (définitions, théorèmes).

Enfin c'est surtout l'intérêt historique, qui a fait découvrir aux élèves une œuvre fondamentale, leur montrant aussi sa modernité qui m'incitera à recommencer ces séances. Il me semble avoir ainsi un peu réparé l'oubli dans lequel cette œuvre était tombée.

Ce qu'il fallait faire<sup>1</sup>....

### Bibliographie :

- Les œuvres d'Euclide traduites par J. Peyrard sont éditées par la librairie scientifique et technique Albert Blanchard à Paris.
- Les éditions ACL-éditions du Kangourou proposent des extraits choisis des livres I ; II et VI : « *Les éléments d'Euclide, pour le collège et le lycée* », collection Textes et conférence mathématiques rédigés par A. Deledicq.



Euclide

<sup>1</sup> Clin d'œil à Euclide qui conclut les démonstrations des propriétés par le classique *Ce Qu'il Fallait Démontrer et les preuves des constructions par le moins utilisé CQFF.*

### Propos d'élèves :

« *J'en ai retenu que les maths avaient leur loi et que l'on ne pouvait pas manipuler les chiffres et les données n'importe comment* »

« *Euclide c'était un mathématicien qui a perdu son temps à prouver des choses qu'il savait déjà mais bon s'il était passionné et s'il voulait faire avancer les maths tant mieux* ».

« *C'était plutôt intéressant de connaître l'histoire des maths* ».

N.D.L.C. Les « portraits » d'Euclide parsemant cet article sont évidemment tout à fait fantaisistes !