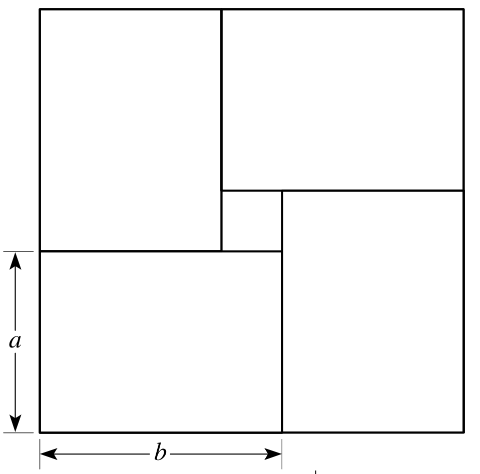
Les aires vecteurs d'inégalités

Henry Plane

L'étude géométrique des surfaces planes a engendré, grâce à leur aire, maints procédés de démonstrations de relations arithmétiques puis algébriques. Si les siècles derniers paraissent avoir négligé cette voie, elle demeure en sa richesse.

Au sujet des inégalités, on y pense peu. Qu'il nous soit permis d'en rappeler un exemple.



Prenons quatre rectangles égaux et disposons-les pour former un grand carré (bords extérieurs) et un petit carré (bords intérieurs restants).

« *Regarde !* » disaient les vieux matheux chinois.

Si je nomme a et b les longueurs des côtés des rectangles, j'ai : aire du grand carré $(a + b)^2$, supérieure à la somme des aires (ab) des quatre rectangles.

$$(a + b)^2 > 4ab$$

Tous les termes étant positifs :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Moyenne géométrique inférieure à moyenne arithmétique.

Et, pour les anciens qui jouaient de la moyenne harmonique :

Je prends le grand carré comme unité (il suffit de diviser les longueurs par $(a + b)$).

$$1 > 4 \times \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b}$$

alors : $\quad ab > \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$

ou $\quad \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

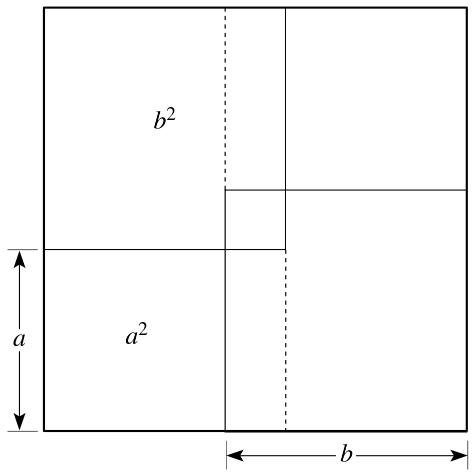
Moyenne géométrique supérieure à moyenne harmonique

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{ou} \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

P.S.: avec un autre « découpage » de la même surface, il advient que :

$$2a^2 + 2b^2 > (a + b)^2$$

Il faudrait cette fois ajouter le petit carré pour avoir l'égalité.



$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$$

Moyenne quadratique supérieure à moyenne arithmétique.