Si on parlait un peu de logique ?

Marc Roux

Récemment (février 2003) un avant-projet de programme pour la spécialité maths en section L incluait des « éléments de logique : [...] connaître et savoir utiliser [...] négation d'une assertion, disjonction, conjonction de deux assertions, implication, équivalence et leurs propriétés élémentaires » ; ceci « en utilisant le langage naturel ». Ces capacités, me semble-t-il, sont sous-entendues dans les programmes de lycée et collège actuels : qui pourrait prétendre faire des maths sans jamais employer les tournures « si... alors... », « ...si et seulement si... » ? Néanmoins, que je sache, aucun programme ne précise à partir de quel niveau chacune de ces compétences devient exigible.

Depuis longtemps sensibilisé aux rapports entre raisonnement et langage (Cf. l'article “*Profs de maths, profs de français, même combat*” que j'ai co-signé, dans Plot 101-102), j'ai voulu par ce texte montrer qu'on peut amener nos élèves à réfléchir sur le raisonnement logique, et évaluer leurs compétences dans ce domaine, sans pour autant tomber dans les ornières du formalisme comme dans les années 70.

Dans ce but, j'ai donné à mes élèves de Terminale S le devoir en temps libre figurant en annexe. Pour éviter un travail trop long, qui n'aurait pas été mené à son terme, j'ai dû limiter le champ des questions : je n'ai pas inclus de phrases vraies à réciproque vraie, pour recentrer l'étude sur les implications[1] à sens unique ; et je n'ai pas mentionné les contraposées, qui pourraient faire l'objet d'un deuxième devoir. Je me suis borné à trois phrases de base : l'une de niveau élémentaire : si $x > 3$ alors $x > 2$; la deuxième dans le programme de la classe : si f est continue alors f est intégrable ; la dernière dans un domaine inconnu des élèves : si $\mathbb{E}$ est convexe alors $\mathbb{E}$ est connexe. Cette répartition avait pour but de savoir si le contenu des phrases avait une influence sur la manipulation des concepts logiques sous leurs différentes expressions. Ces trois phrases de base, leurs réciproques et les équivalences logiques correspondantes sont exprimées de plusieurs façons, en français; ce n'est qu'a posteriori, et de façon secondaire, que je demande leur traduction symbolique.

Je distingue trois catégories d'élèves :

- ceux qui ont donné des réponses en français correctes, avec éventuellement quelques erreurs d'inadvertance. Parmi eux 3 élèves qui ont habituellement des résultats en maths très inférieurs à la moyenne ;
- ceux qui confondent les deux sens de l'implication mais distinguent bien celle-ci de l'équivalence ;
- ceux qui ne font aucune distinction entre une implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante, et classent les phrases au hasard.

[1] *Dans tout l'article, j'utilise le mot “implication” dans sa signification naturelle, équivalant à “si...alors...”*

La question « vrai ou faux ? » pour certaines phrases devait, à mon sens, permettre de détecter des erreurs, si on avait mis « dans le même sac » une phrase visiblement vraie et une autre visiblement fausse ; elle n'a pas tenu son rôle : les élèves ont écrit V ou F en se référant uniquement à la phrase écrite en premier dans chaque case.

Une remarque importante : à une exception près, le contenu des phrases n'influe en rien sur les erreurs; chacun fait ni plus ni moins d'erreurs, et les mêmes erreurs, concernant convexe/connexe ou plus grand que 3/plus grand que 2. Ceci m'a fortement surpris et m'amène à poser la question ouverte : cette invariabilité des compétences (ou incompétences) logiques en fonction du contenu est-elle propre aux élèves de S ? Y a-t-il, comme on le dit, des « esprits concrets » qui raisonnent juste sur des objets visibles et cessent de le faire dès qu'on les mène dans l'abstraction ?

L'explication des résultats décevants(2) à ce devoir semble être une incompréhension des tournures “il suffit que…”, “condition nécessaire”, etc. S'agit-il d'un manque de vocabulaire ou d'une véritable insuffisance sur le plan du raisonnement ? Il est difficile de le dire ; je pense que l'attitude à prendre, la plus positive, est de parier sur la première hypothèse ; mon choix est de provoquer les erreurs, par des activités telles que ce devoir, afin de les mettre en évidence et d'avoir l'occasion de les corriger. Ceci peut et doit être fait le plus tôt possible dans la scolarité, et répété périodiquement ; je crois important d'y intégrer des questions concernant des domaines inconnus au niveau considéré, afin de forcer les élèves à se risquer dans le raisonnement abstrait bien que non formalisé. On peut espérer ainsi au moins un progrès sur le plan lexical, qui peut lui-même, dans certains cas, avoir un effet positif sur le raisonnement logique proprement dit.

A mon sens il est urgent que l'acquisition de compétences logiques (sans formalisation!) soit prévue dans les programmes et évaluée dans les examens (brevet, bac...); il ne doit plus y avoir de bacheliers scientifiques pour qui hypothèse et conclusion sont définitivement indiscernables…

[2] *Je souhaite que les résultats, très décevants, mais très partiels, concernant ma seule classe, soient contredits par des tests analogues concernant tous les niveaux de collège et de lycée, et même en amont et en aval. Si des lecteurs en réalisent, je serais heureux d'en avoir des échos, par e-mail de préférence : mroux.apmep@wanadoo.fr*

ANNEXE

Texte du DEVOIR (Terminale S)

remis le 19/03/2003

Dans le devoir précédent j'ai constaté que beaucoup d'entre vous confondent “si …alors” avec “…si et seulement si…”, ainsi qu'une implication avec sa réciproque. Ce devoir a pour but de clarifier ces notions, essentielles pour tout raisonnement logique (en maths et ailleurs).

Vous trouverez ci-dessous un certain nombre de phrases ; il est important de faire les travaux demandés dans l'ordre indiqué.

1ère partie : Regrouper les phrases dans plusieurs grandes cases *(cases A, B, C,… ; les prévoir assez grandes pour y rajouter des choses plus tard)*, de façon que toutes les phrases d'une même case signifient la même chose, et que toutes les phrases signifiant la même chose soient dans une même case ; une même phrase ne peut pas se trouver dans plusieurs cases.

Rq 1 : quelques phrases contiennent des termes que vous ne connaissez pas ; ne cherchez pas à trouver leur signification : on n'en a pas besoin pour effectuer ce classement.

Rq 2 : il faut recopier les phrases en entier et non pas se contenter d'indiquer leur numéro; pour être efficace ce travail, une fois fait, doit vous mettre sous les yeux toutes les façons de rédiger une même affirmation.

2ème partie : Compléter chaque case par d'autres formulations signifiant la même chose, rédigées en prenant modèle sur des phrases d'autres cases.

Les phrases écrites par vous seront écrites avec une couleur différente des phrases recopiées.

Indication : quand cette 2ème étape est terminée, certaines cases doivent contenir 5 phrases, les autres 3.

3ème partie : Ajouter dans chaque case une phrase (signifiant la même chose que les autres) utilisant l'un des symboles ⇒ ou ⇔.

4ème partie : Certaines cases sont les réciproques les unes des autres : indiquer lesquelles : A est la réciproque de …, etc.

5ème partie : Certaines cases sont la conjonction de deux autres cases, c'est-à-dire que leur contenu signifie à la fois l'une et l'autre : indiquer par exemple Case M = Case I ET case K, etc.

6ème partie : Pour les cases où vous le pouvez, indiquez si leur contenu est Vrai ou Faux (une seule indication par case, car les phrases contenues dans une case signifient toutes la même chose, donc elles sont soit toutes vraies soit toutes fausses.

Voici les phrases annoncées :

1. Si x est plus grand que 3, alors x est plus grand que 2.
2. Pour que x soit plus grand que 3, il faut que x soit plus grand que 2.
3. Pour qu'une fonction soit intégrable sur $[a, b]$, il suffit qu'elle soit continue sur $[a, b]$.
4. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.
5. Une condition nécessaire pour que x soit plus grand que 3 est que x soit plus grand que 2.
6. Une condition suffisante pour que x soit plus grand que 2 est que x soit plus grand que 3.
7. Pour que x soit plus grand que 3 il suffit que x soit plus grand que 2.
8. Une condition nécessaire et suffisante pour que x soit plus grand que 3 est que x soit plus grand que 2.
9. Si x est plus grand que 2, alors x est plus grand que 3.
10. f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, b]$.
11. Si une partie du plan est convexe, alors elle est connexe.
12. Si une partie du plan est connexe, alors elle est convexe.
13. Une partie du plan est connexe si et seulement si elle est convexe.
14. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.
15. Une condition nécessaire pour que f soit intégrable sur $[a, b]$ est que f soit continue sur $[a, b]$.
16. Pour qu'une partie du plan soit connexe, il faut et il suffit qu'elle soit convexe.
17. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable sur $[a, b]$ est que f soit continue sur $[a, b]$.
18. Pour qu'une partie du plan soit connexe il faut qu'elle soit convexe.
19. Pour que x soit plus grand que 3 il faut et il suffit que x soit plus grand que 2.