Initiation à la démonstration en 5ème et après…

Bruno Alaplantive

Reprise d'une activité présentée par Mireille Picard dans le Bulletin vert n° 382 de l'APMEP, cet article suggère d'allier la manipulation proposée à l'utilisation de l'ordinateur. Les fichiers « Cabri » mentionnés dans ce texte sont disponibles sur le serveur. http://www.apmep.asso.fr/plot.html

1- Une situation riche…

Voici la situation telle qu'elle était présentée par Mireille Picard.

Cette situation qui présente un double avantage:

- la nécessité de prouver est facile à susciter,
- la démonstration est à la portée des connaissances d'un élève de 5ème.

Et puis, la situation est évolutive car elle permet de soulever le problème des hypothèses : dans quelle mesure peut-on les modifier sans changer la teneur du problème ?

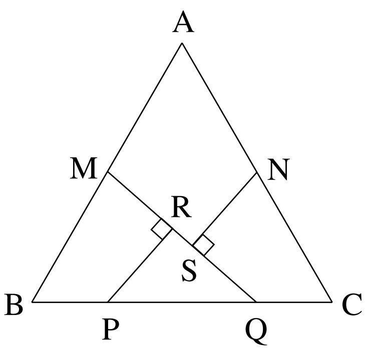


figure 1

Hypothèses :

ABC équilatéral de côté 8 cm (la figure 1 ci-contre est en réduction),

M milieu de [AB], N milieu de [AC], BP = QC = 2 cm, [PR]⊥[MQ] ; [NS]⊥ [MQ].

On découpe les quatre pièces, transformant ainsi la figure en puzzle.

Problème : en utilisant les quatre pièces, reconstituer une figure "connue".

Phase de manipulation :

N'hésitez pas à prendre vos instruments de dessin et ciseaux pour vous rendre compte par vous-même.

Les figures « connues » qui surgissent sont les suivantes : un *rectangle* qui a l'air d'un carré, un *trapèze rectangle*, un *trapèze quelconque*.

Mais la production des élèves ne s'arrête pas là : les octogones, heptagones, hexagones, en général non convexes, fleurissent. Il y a aussi des illusions de trapèze...

Les élèves trouvent en général d'abord le « carré », et bloquent ensuite. Pour les aider, on peut leur dire qu'on peut passer d'une figure à l'autre en ne déplaçant qu'une ou 2 pièces par symétrie centrale.

*Deux fichiers CABRI sont proposés à partir d'un triangle équilatéral (**Puzzle1.fig** et **mot1.fig**). Le premier visant à aider à trouver les deux trapèzes et le "carré" ; le second à visualiser les déplacements transformant le triangle initial en carré. Il s'agit plus, si on dispose d'un ordinateur dans sa salle, de montrer aux élèves que de les faire réellement manipuler. L'ordinateur, utilisé ici dans sa fonction « imagiciel », sert à tirer la conclusion de la phase de manipulation.*

Phase de démonstration :

Cette partie est difficile, mais intéressante : il faut montrer que l'assemblage réalisé est bien un quadrilatère et non un octogone et qu'il n'y a ni trou, ni chevauchement à l'intérieur de l'assemblage.

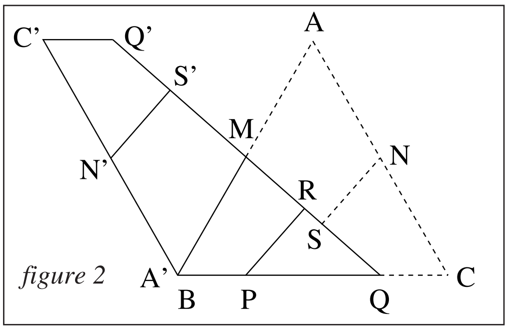


figure 2

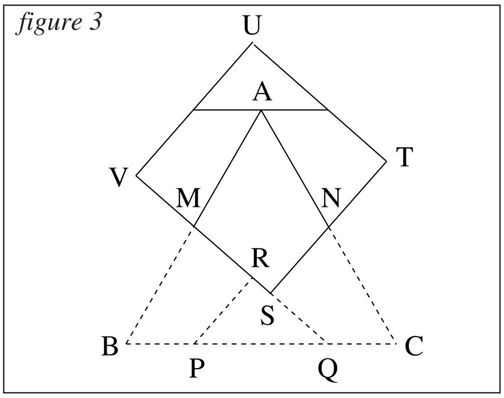


figure 3

Elle constitue un véritable florilège sur les angles et permet aussi l'utilisation de la symétrie centrale (alignement d'un point et de son image avec le centre, parallélisme d'un segment et de son image).

Et c'est le moment de convaincre l'auditoire que mesurer les côtés n'a pas valeur de preuve. Intéressons-nous au cas du rectangle. On dirait que c'est un carré, mais on va voir que ce n'est pas vrai.

Montrons tout d'abord que MNQP est un rectangle. C'est quasiment réalisable en 5ème. En appelant I le milieu de [BC], le triangle MBI est équilatéral (isocèle avec un angle de 60°) et (MP) est un de ses axes de symétrie : [MP] est bien perpendiculaire à [PQ]. Le même raisonnement s'applique pour [NQ] : [NQ] est bien perpendiculaire à [PQ]. D'autre part le triangle AMN est lui aussi équilatéral, alors les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux et par suite (MN) et (PQ) sont parallèles.

MNQP étant un rectangle, son centre et la symétrie s'y rapportant permettent d'expliquer les égalités MS = RQ et PR = SN que les élèves observeront forcément lors des manipulations.

Mais surtout on peut justifier que VS = MQ et ST = PR + SN (fig.3).

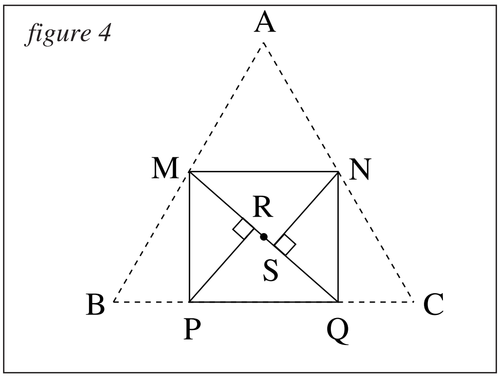


figure 4

Il est alors facile de justifier que la longueur ST obtenue est inférieure à PN, c'est à dire à MQ et donc à VS (fig.5) : le carré n'en est pas un !

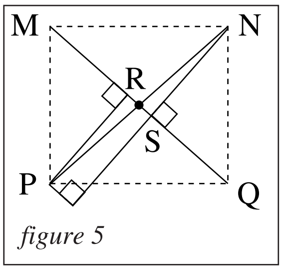


figure 5

Il me semble plus important ici d'insister sur la non égalité des côtés consécutifs du rectangle obtenu (ou aussi sur les longueurs MS et RQ, vraiment égales) que sur la démonstration de la nature rectangle de MNPQ. Ce que l'on croit constater et qui se révèle faux est en fin de compte plus intéressant que ce que l'on constate et qui se révèle vrai. C'est bien dans des situations de doute que le besoin d'explications se fait ressentir en premier.

Vue en 4ème, cette activité permettra d'utiliser les théorèmes des milieux pour la preuve du rectangle. En 3ème, le calcul des longueurs exactes MQ et NS est réalisable (pour NS, à défaut d'utiliser les triangles semblables - sauf à le faire en 2nde - on peut utiliser la trigonométrie). Cette activité peut aussi être l'occasion de composer deux symétries centrales.

Phase de modification de l'énoncé :

Par mise en relation des hypothèses et de leurs conséquences sur les figures, on détermine celles qui sont nécessaires pour obtenir les trois quadrilatères.

On pourrait arriver au résultat suivant :

ABC triangle quelconque, M milieu de [AB], N milieu de [AC], P $\in$ [BC], Q$\in$[BC], BP + QC = PQ = 1/2BC,

R$\in$[MQ], [PR]$\perp$[MQ] ; S $\in$ [MQ],
[NS] $\perp$ [MQ].

Il faudrait encore éviter que R et S soient à l'extérieur du triangle. A vous de peaufiner les hypothèses.

exemple : BC = 10, BA = 9, AC = 7,
BP = 2, QC =3.

Les trois quadrilatères nous reviennent. Seulement le rectangle n'a plus l'air d'un carré et perd ainsi de son mystère.

Dans le but que le puzzle donne vraiment un carré, on peut éventuellement reconstruire un triangle ABC à partir d'un carré MNQP et également commencer par la construction d'un parallélogramme MNQP tel que MQ = NS + RP = 2NS, puis poursuivre par la construction de ABC.

2- … et son prolongement sur CABRI

Cette deuxième partie ne peut se lire qu'en utilisant les fichiers Cabri dont il est question.

L'intention des deux activités d'approfondissement qui suivent est de proposer aux élèves une utilisation véritablement « **i** » de Cabr*i* (cahier de brouillon **i**nteractif). Ce n'est que par le mouvement, qu'en faisant bouger les objets, que l'on peut obtenir les renseignements utiles à la résolution du problème demandé. Cela induit donc un guidage poussé des élèves si l'on ne veut pas « perdre » (?) trop de temps en errances.

① On fixe A, B et C (et donc M et N) et on fait bouger O (et donc P, R et S).

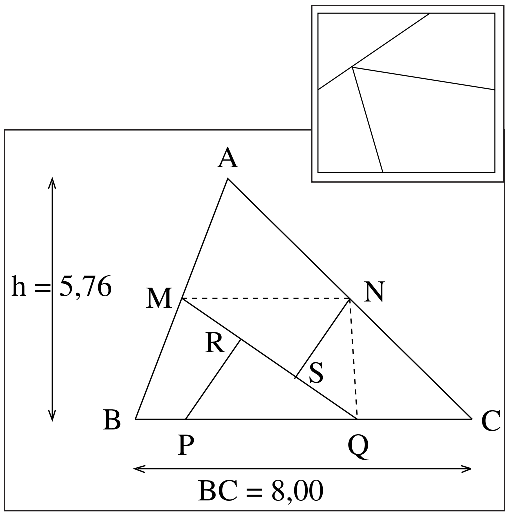
Cette première activité (**Puzzle2.fig**) permet, par calcul, de préciser la position du point Q (sur le côté [BC] d'un triangle fixé) pour laquelle le puzzle forme vraiment un carré.

*Il sera donc particulièrement intéressant d'avoir vu auparavant le fichier **Mvt2.fig** montrant, en fonction de la position du point Q, le puzzle correspondant.*

Le calcul de la longueur MQ s'obtient à partir des aires de triangles. On termine en vérifiant par un découpage effectif sur papier. Cette activité peut être proposée dès la $5^{ème}$, bien que les calculs – obtention de NS^2, passage de NS^2 à NS – puissent s'avérer délicats. Toutefois, il ne s'agit que d'une activité, pas de capacité exigible. En $4^{ème}$, on doit pouvoir mener sans problème cette activité et même utiliser d'autres arguments tels que les théorèmes des milieux pour les calculs d'aires.

*Dans CABRI, ouvrir le fichier **Puzzle2.fig** et le fichier **outired.men**. Le fichier outired.men limite les outils, à l'aire et à la calculatrice. Cela permet d'éviter ainsi les demandes directes de longueur et autres manipulations non désirées.*

→ Faire bouger le point Q.
→ Constater : il faudra donc calculer la valeur de MQ pour laquelle les quatre pièces forment un carré.



A) Observation et conservation d'aires

1) Quand Q se déplace, le triangle PQR devient-il plus grand, plus petit (dans quel sens) ou reste-t-il toujours de la même taille ?
2) Vérifier son pari en sélectionnant l'outil aire et en venant se placer entre P et R pour obtenir en cliquant, l'aire du triangle PQR. Reprendre alors le pointeur pour faire bouger Q.
3) Comment expliquer ce que l'on constate ?
4) Quand Q se déplace, le rectangle formé par les quatre pièces devient-il plus grand, plus petit (dans quel sens) ou reste-t-il toujours de la même taille ?
5) Comment expliquer ce que l'on constate ?
6) Demander l'aire du triangle MNQ. Pourquoi l'aire ne change-t-elle pas lorsque Q se déplace sur [BC] ?
7) Quelle fraction de l'aire de ABC représente-t-elle ? (par calcul ; par position particulière de Q)

B) Calcul de MQ lorsque le « rectangle est carré ».

(Il faudra commencer par rappeler que dans cette position on a : MQ = 2 NS)
1) En utilisant l'aire de MNQ, montrer que $NS^2 = 5{,}76\ cm^2$.
2) En déduire la valeur de NS, puis celle de MQ.
3) Combien vaut MQ^2 ? ... !!!

C) Vérification manuelle

→ Construire les points P, Q, R et S. Découper, vérifier.

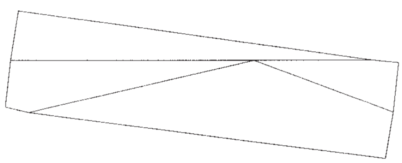
*Le fichier **tri_abc.fig**, permet de distribuer aux élèves le triangle ABC de l'activité. Pour obtenir 4 triangles par feuille A4 lors de l'impression, il faut sélectionner Paysage dans la mise en page et prendre des marges nulles.*

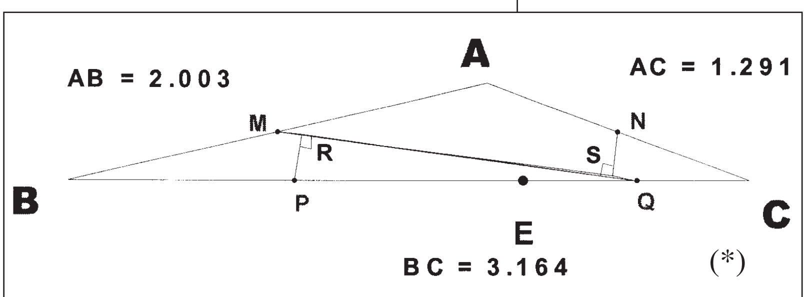
② Cette fois-ci, on fixe M, N, P, Q, R et S et on fait varier A, B et C en gardant les trois conditions M et N milieux et PQ = BC/2. B et C sont définis comme les symétriques d'un point quelconque E du segment [BC] par rapport à P et à Q. Les pièces du puzzle varient, mais pas le rectangle qu'elles forment. A partir de positions particulières, on peut calculer des longueurs. Les calculs feront intervenir les théorèmes de Pythagore et Thalès. L'activité n'est donc proposable qu'à partir de la 4ème.

*Dans CABRI, ouvrir le fichier **Puzzle3.fig** et le fichier outired.men.*

Où que soit placé le point E entre P et Q, les quatre pièces peuvent s'assembler pour former le même rectangle.

Il s'agit de prouver que celui-ci est 4 fois plus long que large …





Il faut penser à bien rappeler aux élèves que ce n'est qu'en faisant bouger les objets, qu'ils obtiendront les renseignements utiles. Moins guidée que la précédente, cette activité sera l'occasion d'essais, de recherches dans lesquelles ils doivent le plus possible par eux-mêmes :

⇒ Constater :
- que les points M, N, P, Q, R et S sont fixes et donc le rectangle puzzle également ;
- que les points A, B et C bougent avec le point E ;
- que la distance AC est fixe ;
- que AB et BC sont variables.

⇒ Trouver :
Une position intéressante du point E : confondu avec P et A.
→ On “retrouve” PQ = 1582
(= AC / 2)
→ On trouve PM = 238
(= AB / 2 dans cette position)
et MQ = 1680
(= BC / 2 dans cette position).
Ces trois distances sont fixes.

⇒ Trouver :
Une autre position intéressante du point E : celle indiquant le parallélisme de (PR) et de (AB).
Dans cette position, BM = 225
(= AB / 2).

→ QB = 1695 (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle MQA).

→Et théorème de Thalès :

$$\frac{QR}{QM} = \frac{QP}{QB} = \frac{RP}{MB} \ ;$$

d'où RP = 210.

⇒ Conclure sur les proportions du rectangle puzzle.

③ Pour conclure : un petit problème pour occuper votre temps libre…
Pour le triangle ci-contre, sauriez-vous construire à la règle et au compas le point Q sur [BC] qui, comme dans **Puzzle2.fig**, génère les 4 pièces qui peuvent être assemblées en carré ?

(*) *Les dimensions ont été choisies de façon à ne travailler qu'avec des entiers, la figure est réalisée à l'échelle 1/28 sur Cabri pour lequel 2.003 signifie bien 2003*