

# Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste

Bernard Parzysz

*Le Bulletin vert, les parutions des Régionales, regorgent de trésors enfouis qu'il nous semble utile de transmettre à ceux qui nous rejoignent.*

*La rubrique « Dans nos tiroirs » a donc pour objectif de proposer des articles, des brochures déjà publiés par l'APMEP et que nous pensons encore d'actualité, pour vous les proposer. Pour les adhérents de longue date, c'est l'occasion de les relire avec un autre regard, pour les nouveaux, celle de les découvrir.*

*L'article de Bernard Parzysz est paru dans le numéro 347 du Bulletin Vert.*

Les arbres sont d'un usage fréquent en combinatoire, et partant en probabilités (voir par exemple Engel 1975). En particulier, l'une de leurs utilisations me paraît digne d'intérêt : celle qui est relative aux probabilités conditionnelles. Tous ceux qui ont, ou qui ont eu, à enseigner cette notion ont souvent pu constater la difficulté de certains élèves à distinguer la probabilité de « A sachant B » de « A et B ». Cette difficulté est en partie liée au langage, et plus précisément aux formulations parfois ambiguës qui figurent dans les énoncés de problèmes, mais elle est en fait plus profonde, et liée à un problème de référentiel (par rapport à quel événement se place-t-on ? l'univers  $\Omega$ , ou l'événement B ?). Il me semble qu'un arbre probabiliste représentant les différents événements en cause, et sur lequel sont indiquées les probabilités de ces événements (un arbre « pondéré » en quelque sorte) peut ici aider à éclaircir la situation. Je ne fais donc que partir d'une idée déjà relativement répandue (voir par exemple les manuels de Terminale D : Louquet 1983, Durrande 1983, Transmath 1987 et Gautier 1988), en précisant cependant les « règles du jeu » (par trop allusives dans ces manuels) et en préconisant un emploi plus institutionnel et

plus étendu. C'est-à-dire que je voudrais, dans ce qui suit, montrer l'intérêt d'une « officialisation » de ce type d'arbre, permettant une utilisation plus efficace de ce qui me semble être un outil performant, même au niveau de la Terminale.

Un tel arbre peut être utilisé chaque fois que sont en présence plusieurs systèmes complets d'événements (le cas le plus élémentaire - et le plus fréquent - d'un tel système étant bien sûr constitué par la paire formée d'un événement A et de son contraire  $\bar{A}$ )

Soit donc un univers des possibles  $\Omega$ , et des systèmes complets d'événements de cet univers. Par exemple :

A, B, C ;

M, N ;

X, Y, Z ;

1 - Nous construisons d'abord un arbre, orienté (par exemple) de la gauche vers la droite, en le ramifiant successivement à l'aide des événements ci-dessus, chaque nœud correspondant en réalité, non à l'événement indiqué, mais à l'intersection des événements reliant celui-ci au sommet  $\Omega$  (figure 1 page suivante).

**Bernard Parzysz a enseigné les mathématiques de la sixième à la terminale. Il a été longtemps animateur à l'IREM de Paris 7. Il est actuellement professeur et directeur adjoint de l'IUFM d'Orléans-Tours. Ses recherches portent sur l'enseignement de la géométrie et de l'aléatoire.**

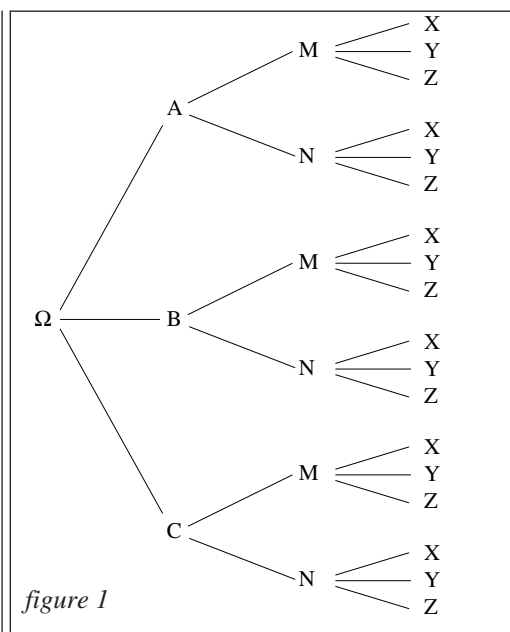


figure 1

2. Nous « pondérons » ensuite cet arbre de la façon suivante :

a) Chaque *branche* partant d'un nœud donné (nœud « source ») est affectée de la probabilité pour que, venant de ce nœud, on l'emprunte pour atteindre le nœud suivant (il s'agit d'une probabilité conditionnelle, la condition étant l'événement correspondant au nœud-source). Ainsi, par exemple, au-dessus de la branche allant de B à N, on écrira la probabilité de « N sachant B » (que nous noterons  $P(N|B)$ ). Remarquons que pour chaque nœud, la somme des probabilités pour les branches qui en partent est égale à 1.

b) Chaque *nœud* peut être affecté de la probabilité qu'on a de l'atteindre, c'est-à-dire de la probabilité de l'événement représenté par ce nœud (rappelons-le, cet événement n'est pas celui qui est écrit, mais l'intersection de tous ceux qui figurent sur le trajet remontant jusqu'à  $\Omega$ ).

Voir par exemple l'arbre partiel de la figure 2 ci-dessous

On voit ainsi que l'on a par exemple

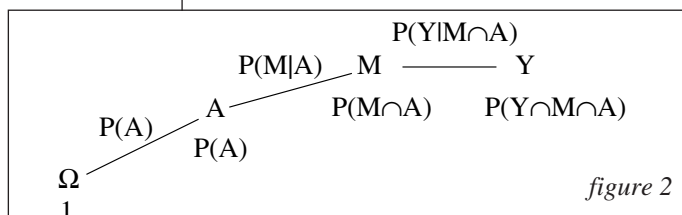


figure 2

$$P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M|A),$$

$$\text{d'où } P(M|A) = P(A \cap M) / P(A).$$

Ces relations entre branches et nœuds permettent alors éventuellement, de compléter la pondération de l'arbre, d'après les données de l'énoncé et/ou les résultats obtenus précédemment.

D'autre part, les probabilités « simples » correspondent aux nœuds et les probabilités conditionnelles aux branches. Leurs positions différentes dans l'arbre favorisent ainsi la distinction entre les deux types.

Outre cette codification des divers constituants de l'arbre pondéré, qui a pour but d'officialiser, en quelque sorte, cet outil, il me semble que l'on pourrait en tirer bien plus de profit qu'on ne le fait actuellement. Dans les manuels précités, l'arbre n'est utilisé que comme un « résumé » de la situation probabiliste (Durrande 1983, p.334), Gautier 1988, p. 362) ou en tant que « remarque » (Louquet 1983, p. 141) ; le caractère *opérateur* d'une telle représentation n'est absolument pas utilisé. Or, je voudrais montrer ici qu'elle constitue un outil tout à fait performant dans la résolution des problèmes. Pour illustrer ceci, commençons par l'utiliser sur un exemple, extrait d'un exercice posé récemment au baccalauréat.

« Un scrutin a été organisé pour renouveler le conseil municipal d'une ville. Pour l'analyse des résultats, on distingue d'une part les électeurs, c'est-à-dire les personnes qui ont le droit de vote, d'autre part les votants, c'est-à-dire les personnes qui ont effectivement pris part au vote. Le taux de participation est alors défini comme le rapport  $\frac{\text{nombre de votants}}{\text{nombre d'électeurs}}$  exprimé sous forme de pourcentage.

De plus, pour cette analyse du scrutin, les électeurs sont répartis en trois groupes, en fonction de leur âge :

- Le groupe I, comprenant les électeurs



de moins de 35 ans, représente 38% de l'ensemble des électeurs.

- Le groupe II, comprenant les électeurs de 35 à 60 ans, représente 43% de l'ensemble des électeurs.

- Le groupe III comprenant les électeurs de plus de 60 ans, représente 19% de l'ensemble des électeurs.

Enfin, les taux de participation ont pu être déterminés dans chacun des groupes : 81% dans le groupe I, 84% dans le groupe II, 69% dans le groupe III.

1. On choisit un électeur « M » au hasard. Déterminer, à  $10^{-2}$  près, la probabilité pour que « M » ait voté. Quel est le taux de participation au scrutin ?

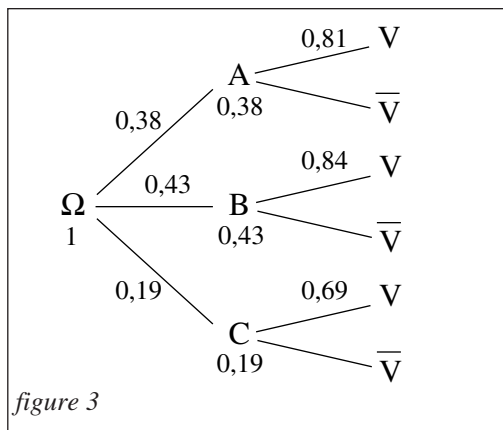
2. On choisit au hasard un bulletin parmi les bulletins dépouillés après le scrutin. Quelle est la probabilité pour que ce bulletin soit celui d'une personne de 35 ans ou plus ? »

(Espagne, juin 1986, série D partiel)

Pour résoudre cet exercice, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\Omega$  : ensemble des électeurs
- A : ensemble des électeurs du groupe I
- B : ensemble des électeurs du groupe II
- C : ensemble des électeurs du groupe III
- V : ensemble des votants
- $\bar{V}$  : ensemble des abstentionnistes.

L'énoncé permet de construire l'arbre pondéré ci-dessous :



On peut alors compléter l'arbre sans difficulté (figure 4, dans laquelle les résultats numériques obtenus sont encadrés).

Pour répondre à la **première question**, il suffit alors d'additionner les trois probabilités correspondant aux nœuds V. Soit :

$$p(V) = 0,38 \times 0,81 + 0,43 \times 0,84 + 0,19 \times 0,69 = 0,80$$

c'est-à-dire qu'en fait on utilise la formule de la probabilité complète.

Pour résoudre la **seconde question** (et c'est ici que l'idée de l'arbre me paraît particulièrement intéressante, et sous-employée), nous allons *construire un second arbre*, en commençant cette fois par l'autre critère, c'est-à-dire la participation au scrutin, et en utilisant les résultats déjà obtenus (figure 5) :

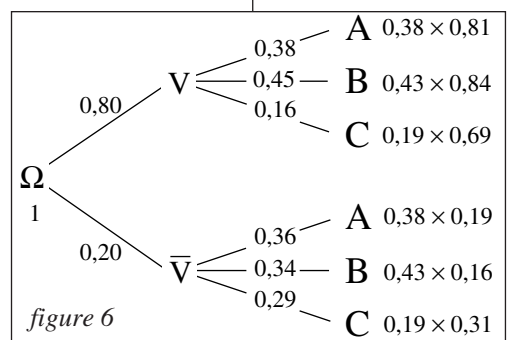
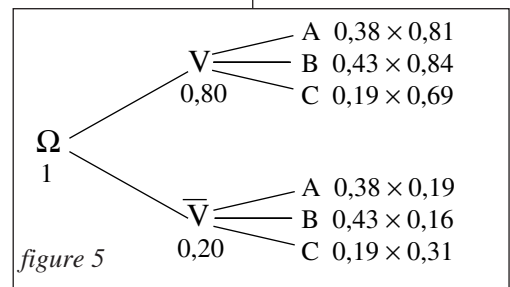
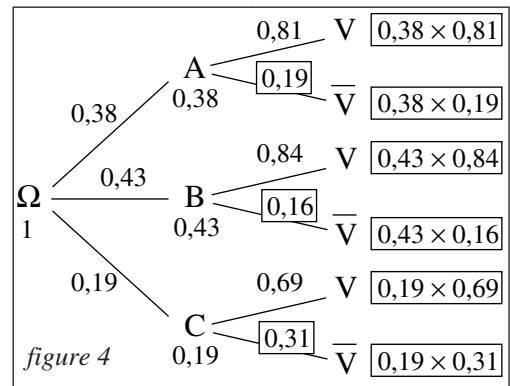
On peut alors compléter l'arbre en indiquant sur les branches les probabilités (conditionnelles), obtenues par division. Par exemple, soit à trouver la probabilité W correspondant à la branche V — A. On doit avoir

$$0,80 \cdot W = 0,38 \times 0,81$$

d'où  $W = (0,38 \times 0,81)/0,80 \approx 0,38$   
c'est-à-dire :

$$W (=P(A|V)) = (P(A) \cdot P(V|A))/P(V)$$

il s'agit, ni plus ni moins, de la formule de Bayes. On obtient ainsi l'arbre complété de la figure 6 :



Bien entendu, la réponse à la question posée s'obtiendra immédiatement à partir de  $W$ , puisqu'elle est égale à  $P(\bar{A}|V)$ , soit  $1 - W$  (c'est-à-dire environ 0,62).

On voit que ce mode de résolution - d'une utilisation au demeurant aisée - exclut tout formalisme, et ne nécessite pas l'explication des formules sous-jacentes (probabilité complète, Bayes). Il offre l'avantage de présenter une forte composante visuelle et de permettre la préservation du « sens » des nombres utilisés et des opérations effectuées. C'est pourquoi, plutôt que de le cantonner dans un simple rôle d'illustration des formules du cours, il y aurait, me semble-t-il, intérêt à l'employer pour une première approche de la notion de probabilité conditionnelle, qui interviendrait ainsi dans un jeu de cadre graphique/numérique, en tant qu'outil (savoir nouveau non formalisé), avant d'être explicitement définie, de devenir objet d'étude et d'être institutionnalisée.

Ainsi, dans l'exemple précédent, les électeurs de moins de 35 ans qui prennent part au scrutin constituent 81 % des 38 % d'électeurs de moins de 35 ans. La probabilité conditionnelle apparaît donc comme le *facteur multiplicatif* permettant de passer de la probabilité de  $A$  à celle de  $V \cap A$  (d'où sa définition). D'un autre point de vue, elle apparaît aussi comme une *probabilité « banale »* : il suffit de considérer le sous-arbre ayant pour « racine »  $A$ . Le problème de la relativité du référentiel apparaît ainsi plus nettement, ainsi que l'identité, quant à la nature (et donc aux propriétés) entre les probabilités simples et les probabilités conditionnelles (N.B. : en fait, ce sont les probabilités simples qui apparaissent ici comme un cas particulier des probabilités conditionnelles, l'événement « condition » étant alors  $\Omega$  lui-même).

Notons enfin qu'un cas particulier

important (introdutif?) de ce que nous venons de voir est constitué par le schéma d'urne, lorsqu'on procède à des tirages successifs d'une boule, que ce soit avec ou sans remise. Dans chaque cas, on a un seul système complet d'événements, et l'indépendance ou non des épreuves successives apparaît à l'évidence sur l'arbre construit. Prenons le cas d'une urne contenant 2 boules noires et 3 boules blanches, et notons  $N_i$  (resp.  $B_i$ ) l'événement « tirer une boule noire (resp. blanche) au  $i$ -ème tirage ». Les arbres des figures 7A et 7B correspondent respectivement aux tirages sans remise et avec remise. On y voit, lorsque le tirage s'effectue avec remise, la répétition du même « motif pondéré », ce qui n'est pas le cas pour un tirage exhaustif :

**Que dire en conclusion ?**

Que ce petit article n'avait aucune prétention novatrice, puisque reprenant une partie déjà attestée (sinon courante).

Qu'il n'avait d'autre but que de mettre l'accent sur un point particulier de l'enseignement des probabilités, et de signaler l'intérêt d'une utilisation plus importante et plus institutionnelle des arbres, en particulier dans les cas où interviennent des probabilités conditionnelles, permettant ainsi, non seulement une illustration, mais surtout une approche différente de cette notion, et fournissant de plus un outil de résolution de problèmes mieux adapté à l'ensemble des élèves. Au lecteur de juger s'il aura pu lui être utile.

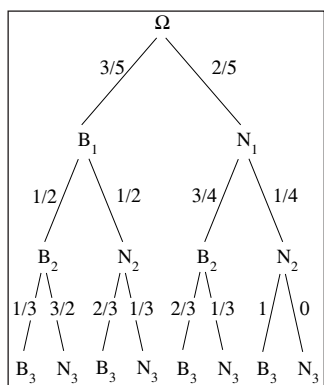


figure 7A

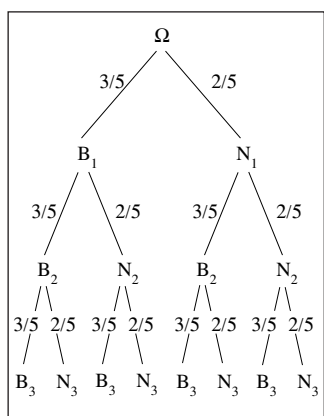


figure 7B