Que sont et à quoi servent les Mathématiques ? (1ère partie)

André Deledicq

La parole à …

Dans cette rubrique, nous donnons la parole à une personnalité dont la réflexion autour des mathématiques et de leur enseignement est particulièrement marquante.

André Deledicq, maître de conférences à l'université Paris 7, s'intéresse à l'enseignement des mathématiques depuis 1972. Il a été en particulier directeur de l'IREM Paris 7 de 1978 à 1981 et chef de mission à la formation au rectorat de Paris en 1986 et 1987.
Depuis 1991, il est l'âme du jeu-concours Kangourou, auquel participent aujourd'hui 33 pays et 2,5 millions de jeunes tous les ans.
Conférencier hors pair, il a accepté, à de nombreuses reprises, de donner aux Journées Nationales de l'APMEP des conférences variées et toujours agréables à entendre.
Auteur de nombreux articles sur l'enseignement des mathématiques, de manuels scolaires et d'encyclopédies, il a écrit divers ouvrages que vous pourrez trouver sur le site de l'APMEP.
Sa très grande culture, sa curiosité toujours en éveil, ses contacts toujours vivants avec les enseignants de terrain lui donnent aujourd'hui un regard unique sur notre discipline et sa diffusion, tant dans le cadre scolaire que dans le grand public.

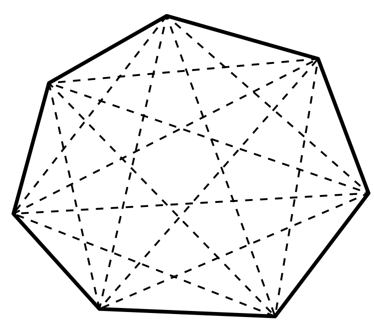
«Que sont et à quoi servent les mathématiques ?» Voilà deux questions que les élèves, leurs parents mais aussi bien d'autres adultes (chauffeurs de cars, agriculteurs, journalistes, manuels ou intellectuels...) se sont au moins une fois posées. Avant de répondre à ces deux questions, je vous propose de faire un peu de mathématiques. Cela nous permettra de mieux savoir de quoi l'on parle tout en prenant quelque plaisir (ce qui est assez souvent le cas en mathématiques), et en apprenant quelques méthodes ou résultats intéressants. Nous traiterons ici trois exemples : un premier numérique, un deuxième géométrique, et un troisième relatif à ce que les matheux appellent «l'analyse», avec laquelle on fait généralement connaissance au lycée.

Le plaisir de faire des mathématiques

Les poignées de main diagonales

La figure suivante représente un polygone à 7 côtés (noir) et toutes ses diagonales (traits discontinus).

Combien y en a-t-il?



Et combien un polygone de 20 côtés a-t-il de diagonales?

Il y a des quantités de manières pour

faire ce compte. L'une d'entre elles est amusante.

Elle consiste à transformer le problème en le voyant «autrement» : les côtés et les diagonales d'un polygone représentent toutes les manières de relier (par des segments) les sommets les uns aux autres. Imaginons que les sommets du polygone soient des personnes et que la question soit : chacune de ces personnes donnant une poignée de main à toutes les autres, combien de poignées de main sont données ?

Dans le cas d'un polygone à 20 côtés, vous voyez que les côtés et les diagonales sont exactement aussi nombreux que les nombres de poignées de main que peuvent se donner 20 personnes participant à une soirée.

Pour les compter, supposons qu'elles arrivent l'une après l'autre :

- La première personne arrivée n'en salue aucune.
- La deuxième personne arrivée en salue une, arrivée avant elle.
- La troisième personne arrivée en salue 2, arrivées avant elle.
- La quatrième personne arrivée en salue 3, arrivées avant elle.
- La cinquième personne arrivée en salue 4, arrivées avant elle.
- Et ainsi de suite…
- La dix-neuvième personne arrivée en salue 18, arrivées avant elle.
- Et la vingtième personne arrivée en salue 19, arrivées avant elle.

Le nombre de poignées de main données est donc :

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 18 + 19.$

Il y a un moyen très simple pour calculer cette somme, c'est de la doubler en écrivant les termes dans l'ordre inverse :

$19 + 18 + … + 4 + 3 + 2 + 1.$

On s'aperçoit alors qu'en ajoutant les termes qui sont les uns en dessous des autres on obtient la même somme :

$20 = 1 + 19 = 2 + 18 = 3 + 17 = …$
$= 18 + 2 = 19 + 1.$

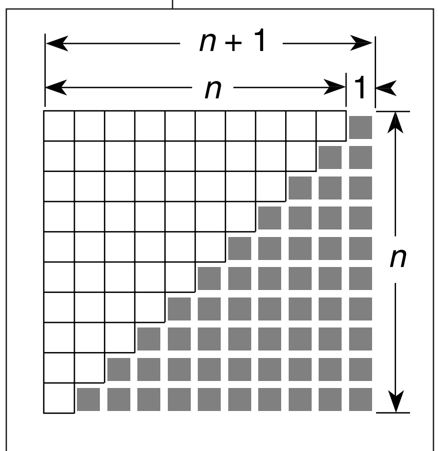
Comme il y a 19 termes, la double somme vaut 19×20.

Le nombre de poignées de main données à cette soirée est donc :

$\frac{19 \times 20}{2}$ soit 190 (!).

Les côtés et les diagonales d'un polygone à 20 côtés sont donc 190 au total ; il y a donc 170 diagonales !

Plus généralement, le nombre de poignées de main dans une soirée à n personnes est $\frac{(n-1) \times n}{2}$.



On le voit bien en généralisant le moyen utilisé pour additionner tous les entiers de 1 à 19.

Cette astuce de calcul peut être magnifiquement illustrée par l'espèce de jeu de construction dessiné ci-dessus.

Mettons côte à côte des piles de 1, 2, 3, 4, ..., n carrés gris.

Combien cela fait-il de carrés gris au total ?

Prenons-en autant de blancs et assemblons les deux morceaux. Cela fait un rectangle de hauteur n et de base $n + 1$.

Cela fait donc $n(n+1)$ carrés.

D'où l'énoncé suivant :

la somme des n premiers nombres $1 + 2 + 3 + 4 + … + n$, vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Cet énoncé est aussi relié aux deux situations suivantes :

- Lorsque n personnes se disent bonjour les unes aux autres, le nombre de poignées de main échangées est la somme des $(n-1)$ premiers nombres, soit $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ce qui est souvent excitant en mathématiques, c'est de relier les uns aux autres des problèmes qui semblent de nature différente : empilage de cubes, poignées de main, côtés et diagonales d'un polygone …

A l'âge de 9 ans, le (futur) mathématicien K.F. Gauss (1777-1855) sidéra son instituteur : celui-ci avait demandé à ses élèves de calculer la somme des 100 premiers nombres entiers (il espérait sûrement que le calcul prendrait du temps pour être un peu tranquille !). Au bout de quelques secondes de réflexion, le jeune Gauss annonça triomphalement 5050 ! Il avait évidemment trouvé la méthode expliquée ci-contre.

• Ce nombre est aussi celui des côtés et des diagonales d'un polygone à n côtés.

Un tel polygone a donc $\frac{n\,(n-1)}{2} - n$ diagonales, soit :

$$\frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Offrons-nous un dernier plaisir dans ce paragraphe en retrouvant ce nombre d'une autre manière, plus «synthétique».

De chaque sommet d'un polygone à n côtés partent n—3 diagonales (puisqu'elles vont vers les autres sommets, lesquels sont n moins le sommet de départ et moins les deux qui sont adjacents). Comme il y a n sommets, cela semble faire n (n —3) diagonales. Mais chaque diagonale joignant 2 sommets est ainsi comptée deux fois ! D'où le nombre 1/2 n (n — 3).

Le camembert d'Archimède

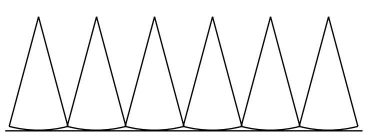
Sachant que le périmètre d'un cercle est proportionnel à son rayon (et que le coefficient de proportionnalité vaut 2π), comment trouver l'aire du disque intérieur à un cercle ?

Supposons que nous soyons douze amis à nous partager un camembert, il n'y a aucune difficulté, pour un mathématicien, à découper un disque en douze secteurs égaux.

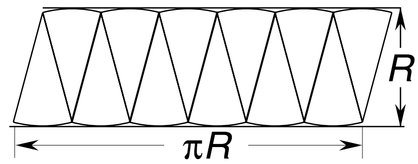
Refaisons alors le raisonnement d'Archimède qui lui permit de calculer, il y a 2300 ans de cela, la surface du disque :

Si R est le rayon du camembert, alors son demi-périmètre vaut πR.

Prenons la moitié des parts formant une demi-circonférence et alignons leur «base» sur une ligne droite.



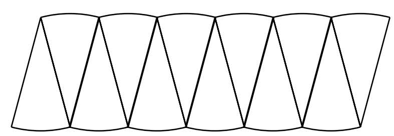
En plaçant l'autre moitié des parts entre les dents de scie camembertiformes, nous obtenons une espèce de parallélogramme.



Ce parallélogramme a pour base la demi-circonférence de camembert (πR) et pour hauteur le rayon (R) du camembert. Sa surface est donc $\pi R \times R$, soit πR^2 (CQFD * !).

Cependant il y a un petit quelque chose d'ennuyeux qui n'avait pas échappé à Archimède. L'espèce de parallélogramme n'est pas vraiment un parallélogramme. Sa base n'est pas rectiligne, c'est un assemblage d'arcs de cercle.

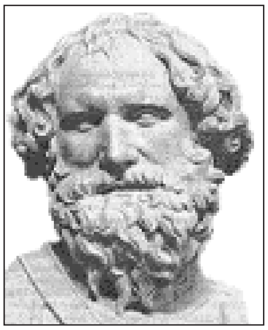
Pour s'en sortir, Archimède, et les mathématiciens après lui, mirent au point une argumentation très intéressante.



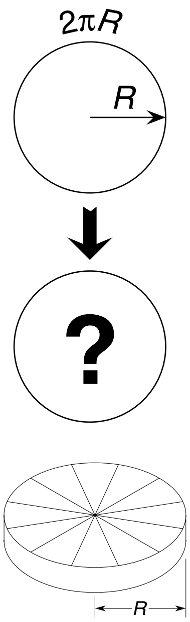
Il y a effectivement une petite différence entre la surface des 12 parts de camembert et la surface de 12 vrais triangles rectilignes (elle vaut environ 0,14 lorsque $R = 1$)

Mais cette différence serait plus petite encore si le nombre de parts augmentait. Par exemple, s'il y en avait 96 (au lieu de 12), cette différence vaudrait moins de un centième. Archimède a vraiment fait le calcul ! Et vous pouvez le refaire. Plus astucieusement, Archimède montra que chaque fois que le nombre de parts doublait, alors cette différence était au moins divisée par 2 (cela aussi vous pouvez le montrer si vous le voulez).

**CQFD = ce qu'il fallait démontrer…*

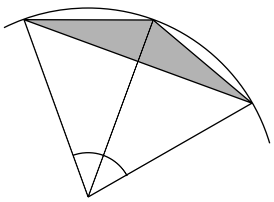


Archimède
III° siècle avant J.C.



N.D.L.R.
Vous trouverez une très belle animation de cette "manipulation" sur le site : http://www.mathkang.org

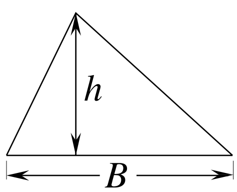
Or il connaissait le théorème qui ouvrait le dixième chapitre des Éléments d'Euclide (et qui est reproduit dans la marge ci-contre*).



Il en déduisit donc que cette différence pouvait être rendue plus petite que n'importe quoi. Et donc que la suface du camembert valait **exactement** πR^2. Ainsi naquit le premier raisonnement d'analyse mathématique de l'histoire. Et c'est cette « analyse » que l'on commence à apprendre en classe de première.

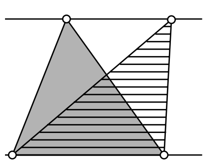
Euclide...

« La surface d'un triangle est le demi-produit de sa base par sa hauteur. »



Voilà un résultat bien utile, ainsi que la formule qui le résume : $S = 1/2Bh$.

De ce résultat, on déduit un autre énoncé : « La surface d'un triangle ne change pas lorsqu'on déplace un sommet parallèlement au côté opposé. »



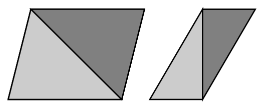
Tout cela n'a pas l'air très excitant. Et pourtant !

Comment imaginer que le triangle grisé et le triangle hachuré ont exactement la même surface ?

On aimerait bien «comprendre» la (ou les) raison(s) de cette égalité. On aimerait bien la démontrer autrement que par une formule...

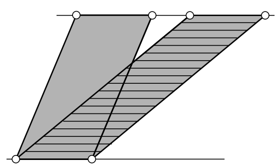
Il est assez passionnant de suivre à ce sujet les idées d'Euclide, qui pensait il y a 2400 ans.

La première idée est qu'un triangle est



exactement la moitié d'un parallélogramme.

Regardez alors ce qui arrive à un parallélogramme lorsqu'on déplace

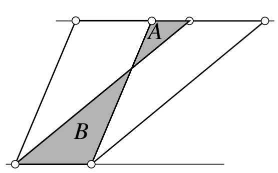


l'un de ses côtés parallèlement à celui qui lui est opposé.

Pourquoi donc le parallélogramme grisé et le parallélogramme hachuré auraient-ils la même surface ?

La démonstration que nous allons faire se passe exactement comme un puzzle : en ajoutant ou en enlevant les mêmes pièces à deux figures égales en surface, on retrouve des figures égales à ces surfaces.

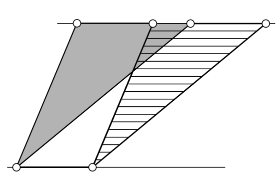
Forts de cette idée, intéressons-nous à deux pièces particulières du puzzle dessiné : les pièces A et B.

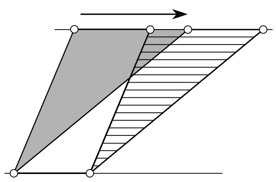


Que deviennent chacun des parallélogrammes lorsqu'on leur retire la pièce B (qui leur est commune) et qu'on leur ajoute la pièce A ?
Ils deviennent tout simplement les triangles ci-contre, l'un grisé et l'autre hachuré.

*** Proposition 1**
Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. (Eléments d'Euclide, première proposition du chapitre X).

La démonstration est une activité typiquement mathématique : partir d'hypothèses déjà connues ou « évidentes » pour en déduire des conséquences, parfois curieuses ou étonnantes, c'est le lot commun des mathématiciens.





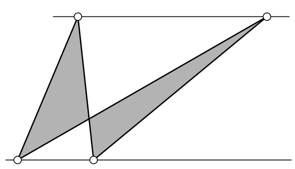
Ces deux triangles ont la même surface ; en effet, il suffit de pousser le grisé comme indiqué par la flèche pour obtenir le hachuré (les matheux parlent de « translation »).

Et voilà donc démontré « géométriquement » qu'un parallélogramme ne change pas de surface quand on déplace un côté parallèlement au côté opposé.

Cette démonstration n'est-elle pas intéressante ?

... et le théorème du papillon

Et si vous l'avez bien suivie, vous comprenez pourquoi les deux « ailes de papillon » dessinées ci-dessous ont les mêmes surfaces.



C'est une figure que l'on peut présenter comme un tour d'esprit : tracez deux droites parallèles et prenez deux points sur chacune. N'importe où !

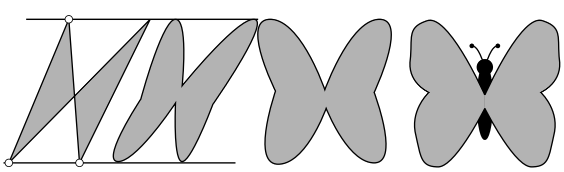
Les deux « ailes de papillon » obtenues ont toujours la même surface !

N'est-ce pas un résultat merveilleux ?

Montrer cette figure à un (ou une) ami(e) et demandez-lui ce qu'il en pense ; cela ne devient évident qu'après avoir parcouru l'ensemble de la démonstration que nous venons de faire ; elle est facile à comprendre, mais, avant de l'avoir parcourue, on ne voit pas, et après on voit.

Et c'est cela qui est beau dans un problème. Être d'abord étonné et pouvoir dire après coup, avec un sourire complice : « Ah ! C'était évident. »

Les trois exemples que nous venons de développer sont déjà très beaux. Et pourtant ils n'utilisent que des outils élémentaires : comptages simples, conservation des surfaces après découpage, déplacement des morceaux et recomposition d'une autre figure. Et il y en a tant et tant à montrer aux élèves !



Le double jeu des mathématiques

Ce qu'il y a d'extraordinaire dans les démonstrations que nous venons de voir, c'est que leur grand âge n'infirme pas leur validité : en mathématiques, ce qui a été juste et bien fait il y a plus de 2000 ans le reste aujourd'hui. C'est un fantastique et excitant privilège des mathématiques que tout ce qui a été pensé, trouvé et démontré un jour garde encore aujourd'hui une valeur intacte. Ce n'est pas du tout la même situation dans d'autres disciplines.

Ainsi, de nombreuses affirmations ou opinions en physique, en médecine, en mécanique... sont ainsi aujourd'hui dépassées ; les *Éléments* d'Euclide, eux, restent valables après 2400 ans*.

* **Les deux théorèmes les plus connus des mathématiques, ceux de Thalès et de Pythagore, portent les noms de savants vivant il y a plus de deux millénaires et demi. Et ce qu'ils disaient reste encore vrai aujourd'hui !**

Comment cela est-il possible ? Pour le comprendre, revenons sur ce fait curieux que tout le monde remarque très vite : les mathématiques présentent et ont toujours présenté deux faces complémentaires mais très différentes.

• D'une part, **les mathématiques offrent un ensemble d'outils permettant la résolution de problèmes pratiques ou techniques**. Sans elles, la culture et la vie des hommes ne seraient pas ce qu'elles sont. Ainsi, aujourd'hui, notre santé, l'industrie, l'économie marchent essentiellement avec des mathématiques...

Au XVIIIe siècle, lorsque les navigateurs voulaient connaître leur position sur les océans, il fallait qu'ils connaissent l'heure exacte ; et si l'on a réussi à faire des horloges justes malgré les roulis et tangage des bateaux, c'est grâce aux mathématiques.

Avant Jésus-Christ, avec les mathématiques qu'il connaissait, Archimède inventa de bons systèmes de pompage de l'eau et réussit, dit-on, à mettre le feu aux galères romaines ennemies.

Bien avant encore, les paysans égyptiens retrouvaient, après la crue du Nil, l'emplacement exact et les dimensions de leurs champs grâce aux connaissances élémentaires de leurs géomètres.

• D'autre part, **les mathématiques sont un remarquable jeu de constructions intellectuelles**, où l'intuition et le rêve acceptent les contraintes imposées par une impeccable et rigoureuse logique.

Ainsi les géomètres égyptiens bâtissaient-ils les Éléments d'Euclide, modèle de tous les exposés mathématiques qui ont suivi...

Ainsi Archimède définissait-il le nombre π et montrait-il comment calculer exactement les aires de figures aux frontières courbes.

Ainsi, au XVII[e] siècle, Newton et Leibniz inventaient-ils le plus fantastique et le plus efficace « calcul » que l'esprit humain ait jamais imaginé.

Ainsi, aujourd'hui, Andrew Wiles vient-il de réussir à démontrer un « théorème » (énoncé par Pierre de Fermat, il y a plus de trois cents ans) sur lequel des milliers de mathématiciens amateurs et professionnels s'étaient cassé la tête sans y parvenir.

Et si les constructions abstraites engendrent parfois d'efficaces boîtes à outils, c'est que les mathématiciens savent profiter à la fois de la prétendue gratuité de leurs jeux et de la signification que peuvent prendre ces jeux dans des situations concrètes.

Les mathématiques semblent ainsi jouer perpétuellement un « double jeu », avec chacun ses règles. Celui qui se joue dans votre tête, avec ses montages logiques, ses rêves et ses inventions, et celui qui utilise les pièces du monde réel, avec sa complexité et ses contraintes parfois contradictoires.

À SUIVRE …

Ne ratez pas la seconde partie de l'article d'André Deledicq dans le prochain numéro de PLOT

André Deledicq nous a fait parvenir une liste de 24 ouvrages qu'il a rédigés (hors manuels scolaires et ouvrages collectifs).
Ils couvrent un grand nombre de domaines divers des mathématiques.
Vous trouverez la liste de ces ouvrages sur le serveur de l'APMEP :
http://www.apmep.asso.fr
dans la rubrique consacrée à PLOT.