PLOT

Partager Lire Ouvrir Transmettre

année 2002
101 - 102

AUTOUR DE LA SECONDE

Journées Nationales APMEP
Nice - 2000 - Ateliers

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
26 rue Duméril - 75013 Paris
http://www.apmep.asso.fr

PLOT 101 102

PARTAGER - LIRE - OUVRIR - TRANSMETTRE

Une nouvelle étape pour PLOT...

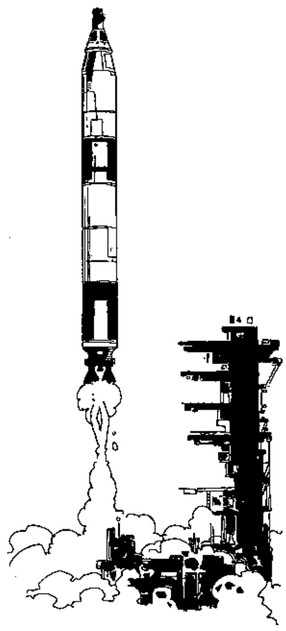
A la rentrée de l'année scolaire 1975-76, il y a déjà plus de vingt cinq ans, le bureau de la régionale APMEP d'Orléans-Tours décidait la création d'un bulletin régional qui avait pour objectif de renforcer la communication entre les adhérents au niveau régional. Outre l'actualité de l'enseignement des mathématiques dans l'académie, l'annonce ou le compte rendu de manifestations organisées par la régionale, notamment les Journées Nationales de l'APMEP des 19, 20 et 21 septembre 1975, on pouvait y trouver des articles de mathématiques rédigés par quelques collègues de la régionale. Ce bulletin (intitulé BROT, Bulletin Régional d'Orléans-Tours) devait être l'amorce d'une nouvelle revue, rassemblant les forces de trois régionales voisines : **P***oitiers*, **L***imoges* et **O***rléans*-**T***ours* (**PLOT**). C'est donc en 1975 que le premier numéro de PLOT a vu le jour. Rassemblant essentiellement des articles de mathématiques, très lié aux questions d'enseignement, chaque numéro se voulait porteur d'un thème fédérateur parmi lesquels on peut citer : *Symétrie, spécial chaos, curiosité en mathématiques,horizons mathématiques, mathématiques du ballon rond...* Si les thèmes abordés furent très nombreux et divers, certains numéros ont rassemblés les comptes rendus d'ateliers de diverses journées nationales, dépassant ainsi de loin le caractère régional du début de la revue. On cite par exemple « *Mathématiques à la pointe* » pour les journées bretonnes de Loctudy ou « *Mathématiques en révolution* » pour les journées de Paris en 1989.

Si le contenu de la revue a évolué vers des articles à vocation nationale, l'équipe de rédaction, essentiellement animée par **Michel Darche**, est restée très locale et l'élargissement à d'autres régionales à une époque n'a pas permis d'atteindre les objectifs espérés : la formation d'une véritable équipe de rédaction stable et productive. La petite équipe d'Orléans s'est, à la fin, réduite à quelques bonnes volontés et n'a pu être productive que par la ténacité et le dynamisme de son rédacteur en chef. Après l'échec de tentative de reprise de la revue par une autre équipe, souhaitée par la régionale, et compte tenu des lourdes contraintes tant financières que rédactionnelle qu'imposait le maintien de cette publication, l'assemblée générale de la régionale d'Orléans-Tours réunie à Chateauroux en 1999 a décidé la cessation de cette publication à l'issue de l'année mondiale des mathématiques de l'an 2000.

Quelques numéros ont été publiés pour atteindre le défi des ***100 numéros*** réalisés en 25 ans et c'est avec un grand plaisir que la régionale a appris le souhait de poursuite sous le titre **PLOT** (qui change de signification : **P***artager* **L***ire* **O***uvrir* **T***ransmettre*) qui deviendra à partir de 2003 une revue ***à l'intention des collègues de mathématiques en début de carrière***.

A titre de souvenir, chaque numéro futur contiendra le petit texte suivant : « *Revue fondée par les régionales d'Orléans-Tours, Poitiers et Limoges en mars 1976* ».

Jean Claude SACHET
Président le la Régionale APMEP
D'Orléans-Tours



Directeur de publication
Jean-Paul Bardoulat

Responsable de la Rédaction :
Henri Bareil

Abonnement :
24,5 euros pour 4 numéros

Maquette :
Atelier Jean-Eugène

Impression :
Imprimerie Louis-Jean
Gap.

Editeur
APMEP
26 rue Duméril
75013 Paris
http://www.apmep.asso.fr

Sommaire page suivante

Partager... Lire... Ouvrir... Transmettre

PLOT 1975 ... 2000 ... 2002 ... 2003 ...

... Avec une transition...

L'équipe orléanaise de PLOT, animée, depuis de nombreuses années, avec beaucoup de savoir-faire et d'intelligence par **Michel Darche et son épouse**, a décidé d'arrêter. Ils ont su faire une revue de grande qualité, appréciée de ses lecteurs et ont droit aux plus grands éloges.

Sur une proposition de Christiane ZEHREN, rédactrice en chef du *bulletin vert*, le bureau et le comité ont décidé de reprendre ce titre prestigieux. C'est l'occasion d'exprimer la forte volonté de l'APMEP de s'ouvrir davantage aux préoccupations des collègues, tout particulièrement les "*débutants*" [1] et d'être encore plus efficacement à leur service. Dans cette optique, une équipe spécifique, entourée d'un collège de jeunes enseignants pour une lecture critique des articles proposés, se met en place autour de Valérie LAROSE [2]. Elle prépare pour janvier 2003, la parution du ***futur PLOT***. Ce sigle signifiera désormais : **P***artager*, **L***ire*, **O***uvrir*, **T***ransmettre*. Il y aura 4 numéros par an, de 32 pages en A4, sous la même présentation que celle-ci, avec des articles courts, proches du "*terrain*" (complémentaires de ceux du bulletin vert) regroupés en rubriques nombreuse et variées.

Cette heureuse concrétisation, en 2003, des intentions de l'APMEP devrait permettre d'inaugurer une belle aventure qui favoriserait, en retour, la croissance et le nécessaire renouvellement de l'association. *Tous les adhérents devraient s'y sentir mobilisés... et soutenir PLOT par des propositions d'articles et des abonnements.* Pour les y aider le n° 104, premier PLOT 2003, sera offert à tous les adhérents, cependant que, entre autres "cadeaux", tous les PLOTS 2003 le seront aux nouveaux. Les conditions d'abonnement figureront sur le serveur, la plaquette de rentrée, le BGV et Bulletin Vert de septembre, ces derniers contiendront également le sommaire du n° 103.

En attendant, le présent numéro double 101-102 perpétue la tradition de l'ancien PLOT puisqu'il propose les comptes rendus d'Ateliers des Journées Nationales de l'APMEP de Nice 2000. Le n° 103 proposera ceux des journées Nationales de Lille 2001, il complétera ainsi utilement le bulletin vert n° 441 consacré presque entièrement aux conférences de ces journées. Ces numéros de PLOT seront vendus comme brochures, sauf pour ceux qui ont souscrit un abonnement à "l'ancien PLOT" pour 2002.

Je vous laisse savourer la présente sélection d'Ateliers des journées de Nice. Elle en vaut la peine! Mais, bon appétit, aussi, pour le futur PLOT.

Jean-Paul BARDOULAT

[1] On peut débuter à tout âge, par exemple à l'occasion d'une migration collège-lycée.

[2] vlarose@club-internet.fr - Tél. : 01 64 49 39 29

AVIS À LA POPULATION

Ce numéro de PLOT, que vous avez entre les mains, est consacré aux ateliers des Journées Nationales de Nice (2000). Le prochain sera consacré aux ateliers des Journées Nationales de Lille (2001).
A partir de 2003, PLOT deviendra une revue à l'attention des professeurs de mathématiques "débutants", sans pour cela que les "non-débutants" en soient exclus... Participez à l'aventure du nouveau PLOT : propositions d'articles, abonnements ... Il compte sur vous !

PLOT 101 - 102
SOMMAIRE

• **Des arbres de fréquence vers les arbres de probabilité**
J.-P. GRANGÉ (Besançon) 4

• **Statistique en Seconde**
Rémy COSTE 13

• **Conformité d'une proportion, quelle démarche ?**
G.R.E.S. 25

• **Intervalle de confiance d'une proportion**
G.R.E.S. 29

• **Le nouveau programme de seconde avec Cabri**
Jean-Jacques DAHAN 25

• **Profs de Maths, Profs de Français : même combat**
Annick LORANT-JOLLY & Marc ROUX 41

DES ARBRES DE FRÉQUENCE VERS LES ARBRES DE PROBABILITÉ

J. P. GRANGÉ (BESANÇON)

Description statistique et premiers schémas

Une enquête effectuée auprès des employés d'une entreprise, concernant le sexe et le salaire, a donné les résultats suivants, présentés dans un

a) Tableau de Carroll

	salaire < 8 000 F	salaire ⩾ 8 000
femmes	400	300
hommes	600	200

} **F**

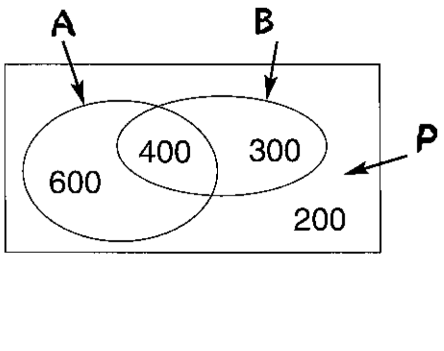
A

Notons **P** l'ensemble des employés de l'entreprise, **A** l'ensemble des employés dont le salaire est inférieur à 8 000 F et **F** l'ensemble des employées de sexe féminin.

Ces notations **P**, **A**, **F** représentent des ensembles statistiques et ne doivent pas être confondues avec les notations Ω, A, F, introduites ensuite pour désigner les événements associés dans le modèle probabiliste.

Autres schémas possibles pour traduire ces renseignements :

b) Diagramme de Venn :



c) Tableau de contingence

On peut compléter l'énoncé par un calcul des effectifs marginaux, on obtient un tableau de contingence des effectifs :

salaire / sexe	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F **^{c}A**	Total par sexe
femmes **F**	400	300	700
hommes **H**	600	200	800
Total par tranche de salaire	1000	500	1500

où **^{c}A** désigne le complémentaire de **A** dans la population **P** et on notera dans la suite $\overline{A}$ l'événement contraire de A dans le modèle probabiliste.

d) Tableau de contingence des fréquences

De ce dernier diagramme, on déduit le tableau de contingence des fréquences absolues ou proportions de chaque partie dans la population :

duquel on peut extraire quatre sous-diagrammes donnant les **fréquences relatives :**

salaire / sexe	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F **^{c}A**	fréquence par sexe
Femme **F**	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$
Homme **H**	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
fréquence par salaire	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés qui gagnent moins de 8 000 F :

salaire / sexe	< 8000 F **A**
Femme **F**	$\frac{4}{10}$
Homme **H**	$\frac{6}{10}$
	1

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés gagnant plus de 8 000 F :

salaire / sexe	⩾ 8000 F ^{c}**A**
Femme **F**	$\frac{3}{5}$
Homme **H**	$\frac{2}{5}$
	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les femmes :

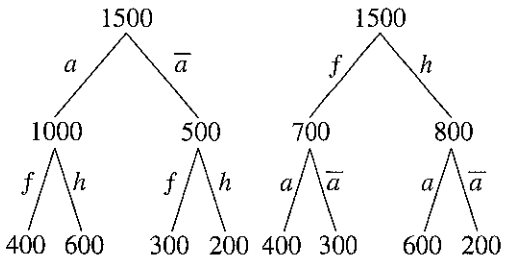
salaire / sexe	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F ^{c}**A**	
Femme **F**	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les hommes :

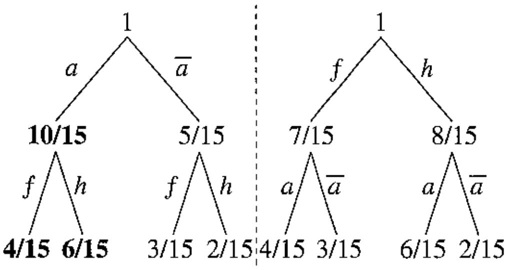
salaire / sexe	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F ^{c}**A**	
Homme **H**	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

PASSAGE AUX ARBRES

Le schéma en arbre nécessite le choix d'un ordre dans la considération des caractères salaire et sexe dont les modalités sont nommées a, $\overline{a}$ et f, h. Il y a donc deux arbres possibles pour les effectifs :



Desquels on déduit les deux arbres des fréquences absolues :



arbre A

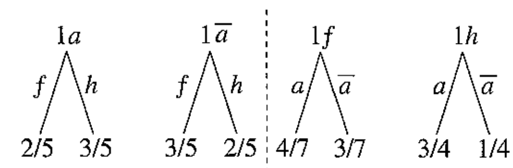
Si la construction de ces arbres paraît naturellement issue des arbres précédents et s'il est vrai que

4/15 + 6/15 = 10/15

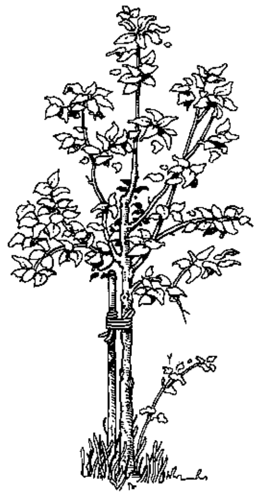
et que 3/15 + 2/15 = 5/15,

cela ne correspond pas à la spécificité de l'arbre. En effet, sur l'arbre A on a plutôt tendance à lire par exemple les 4/15 des 10/15 car dans ce schéma, le caractère f suit le caractère a. Ces arbres de fréquences absolues ne sont jamais utilisés et il serait dangereux de les présenter aux élèves. **Il faut réserver les arbres pour des schémas multiplicatifs et les tableaux pour les schémas additifs.**

On a aussi quatre arbres des fréquences relatives que l'on peut construire ainsi :



sous-arbre 1 sous-arbre 2



Un arbre probabiliste ?

L'idéal serait de remplacer les deux sous-arbres de l'arbre A précédent par les deux sous-arbres 1 et 2 ci-dessus. Il faut alors contourner la difficulté de faire coïncider la fréquence absolue de a, 10/15 avec la fréquence lorsque a sert de référentiel, c'est-à-dire 1. On peut alors échanger sur l'arbre les positions des modalités et de leurs fréquences, on obtient ainsi l'arbre 1 ci-dessous qui est un premier pas vers les arbres probabilistes.

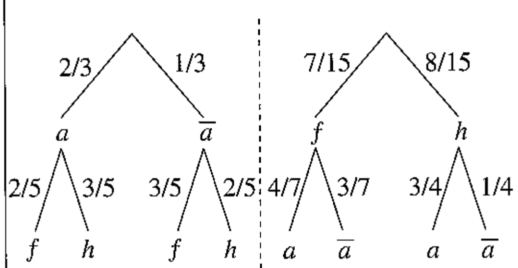
De l'expérience aléatoire vers les arbres probabilistes

On choisit au hasard une personne employée dans cette entreprise et on ne s'intéresse qu'aux caractères statistiques sexe et salaire [1].

Pour mettre en évidence l'avantage de l'arbre par rapport au tableau, changeons l'énoncé en supposant que les quatre renseignements initiaux sur cette entreprise soient les suivants :

2/3 des personnes employées gagnent moins de 8 000 F. Parmi elles 2/5 sont des femmes et parmi celles qui gagnent plus de 8 000 F, 2/5 sont des hommes. 7/15 des personnes employées sont des femmes[2].

Désignons encore par a l'événement « la personne choisie est de caractère a », de même pour $\overline{a}$, f, h. Le déroulement des événements de cette expérience aléatoire peut se représenter par l'arbre 1 suivant :



arbre 1 arbre 2

L'arbre 1 conduit à l'univers :
$\Omega = \{(a,f)\ ;\ (a, h)\ ;\ (\overline{a}\ , f)\ ;\ (\overline{a}\ , h)\}$.

Pour nos élèves, on peut justifier l'attribution de probabilités aux événements élémentaires de Ω de la manière suivante :

D'après la conception fréquentiste de la probabilité, si on répète N fois cette expérience à deux épreuves, on peut **espérer**[3] que $\frac{2}{3}$ des N expériences donneront $\boldsymbol{a}$ (une personne qui gagne moins de 8 000 F) puis $\frac{2}{5}$ de ces $\frac{2}{3}\times N$ expériences donneront $\boldsymbol{f}$ (une femme) donc $\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}$ des N expériences donneront $\{a, f\}$. Ce qui conduit à **estimer**[4]

$$P(\{a, f\}) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15},$$

si on note P la probabilité définie sur Ω.

Ce raisonnement conduit à cet énoncé : « Sur l'arbre, la probabilité du couple (a, f) s'obtient en multipliant les probabilités successives de a et de f »[5]

D'où la loi de probabilité associée à cette expérience :

Ω	(a, f)	(a, h)	$(\overline{a}, f)$	$(\overline{a}, h)$
$P(\{\Omega\})$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Ce raisonnement précédent se généralise à une expérience comportant n épreuves aléatoires et conduit à cette "règle d'arbres" :

« Sur un arbre, la probabilité d'un $\boldsymbol{n}$-uplet s'obtient en multipliant les probabilités successivement rencontrées ».

Les deux arbres précédents sont des schémas d'aide à la compréhension et à la décomposition de l'énoncé pour un traitement adapté aux probabilités. Ils nous ont également servi à suivre le raisonnement précédent qui nous a conduit à une première règle. Mais ils

NOTES

[1] Une situation statistique donne lieu à une situation probabiliste en introduisant l'expérience standard : « prélèvement au hasard d'un élément de la population *P*.

8 000 F = 1219,59 euros

[2] Ce dernier renseignement est inutile pour construire l'arbre 1, mais indispensable pour l'arbre 2, comme on va le voir dans les exercices qui vont suivre. On peut déjà remarquer que, pour construire un arbre, on peut ignorer les effectifs ; seules les fréquences ou les proportions sont indispensables

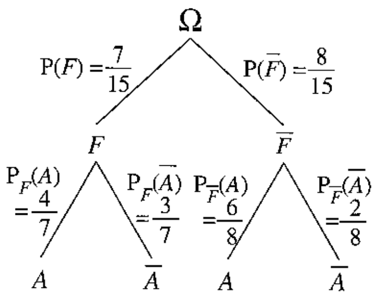
[3] $\frac{2}{3}\times N$ est **l'espérance mathématique** de la variable aléatoire binomiale du nombre de réalisations de $\{a\}$ lorsqu'on répète N fois cette expérience.

[4] C'est le meilleur **estimateur** d'après la théorie statistique de l'Estimation.

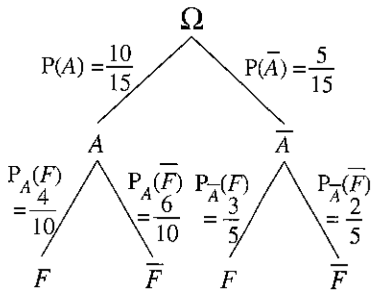
[5] En réalité, cet énoncé représente la propriété selon laquelle la probabilité conjointe $P(A1\cap F1)$ est égale au produit des probabilités $P(A_1)\times P_{A_1}(F_2)$.

ne sont pas encore des **arbres probabilistes**. Pour cela, il faut définir avec précision les différentes probabilités qui interviennent et il faut également donner des règles de construction et d'utilisation de ces arbres qui soient cohérentes avec la théorie des probabilités.

Voici les deux arbres probabilistes qui correspondent à cette situation aléatoire et dont les explications sont au paragraphe suivant :



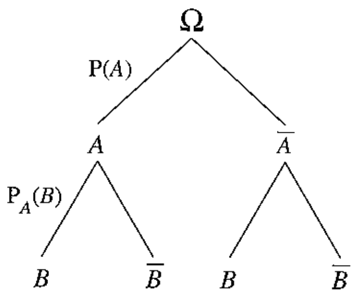
E	$A\cap F$	$\overline{A}\cap F$	$A\cap\overline{F}$	$\overline{A}\cap\overline{F}$
$P(E)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$



E	$A\cap F$	$A\cap\overline{F}$	$\overline{A}\cap F$	$\overline{A}\cap\overline{F}$
$P(E)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Premières règles de construction et d'utilisation dans les cas élémentaires

1 - Un **arbre** se fabrique et se lit de la gauche vers la droite ou du haut vers le bas. L'origine de l'arbre est l'événement certain, l'univers Ω sur lequel est définie une probabilité qui sera notée P.

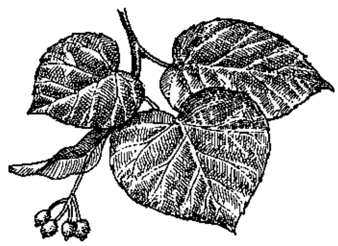


2 - Une **branche** représente un lien probabiliste entre un événement A, considéré comme antécédent, et un événement B considéré comme succédant à A. La probabilité notée sur cette branche est la probabilité de B conditionnée par la réalisation de l'événement A.

Remarquons que cette définition s'applique dès la première branche puisqu'on a :

$$P_{\Omega}(A) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A).$$

3 - Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un **chemin**. Au bout d'un chemin se trouve une **feuille**, pas toujours indiquée, qui représente l'événement conjoint des événements rencontrés sur ce chemin et sa probabilité est égale au produit des probabilités notées sur chacune de ses branches.



	événement	probabilité
$\Omega \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B)} B$	$A\cap B$	$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$

4 - La conjonction, notée $A\cap B$, de deux événements A et B étant commutative, un chemin n'est pas ordonné.

Par exemple, on peut écrire :

$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$
$= P(B\cap A) = P(B)\times P_B(A)$.

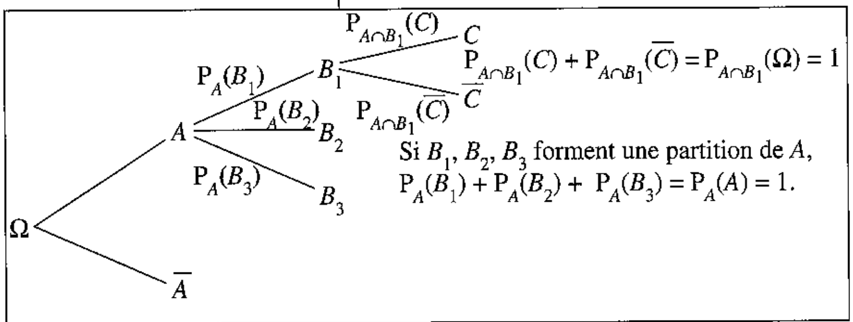
Ainsi, lorsque deux ou plusieurs arbres

traduisent la même situation aléatoire, la probabilité relative à une feuille peut être transférée d'un arbre à l'autre ou aux autres.[6]

Pour illustrer des expériences aléatoires moins élémentaires, on peut ajouter des règles complémentaires comme les suivantes :

Règles complémentaires

5 - Sur un arbre, si les événements succédant à un événement A en forment une partition, alors la somme des probabilités notées sur les branches qui suivent A est égale à 1.



De cet arbre, on peut extraire le chemin qui mène à l'événement feuille :

$$A \cap B_1 \cap C :$$

$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B_1)} B \xrightarrow{P_{A\cap B_1}(C)} C$$

événem[t] E	probabilité P(E)
$A\cap B_1 \cap C$	$P(A) \times P_A(B_1) \times P_{A\cap B_1}(C)$

6 - On dit qu'un arbre est **complet** si, pour chacun de ses événements, les événements succédant en forment une partition. Sur un arbre complet, l'ensemble des chemins qui joignent Ω à un événement final représente des événements qui forment une partition de Ω, ainsi, la somme de leurs probabilités vaut 1.

Par exemple, sur l'arbre ci-dessus, lorsque B_1, B_2, B_3 forment une partition de A, on a :

$$P(A\cap B_1 \cap C) + P(A\cap B_1 \cap \overline{C}) + P(A\cap B_2) + P(A\cap B_3) + P(\overline{A}) = 1$$

Ces dernières règles donnent un aperçu des difficultés qui vont surgir si on veut progresser dans la voie des arbres probabilistes alors que, dans la voie mathématique, les théorèmes probabilistes, comme les définitions, sont rigoureux et décontextualisés, c'est donc vers elle qu'il faut peu à peu se diriger. En ce qui concerne les arbres, il serait donc préférable de s'en tenir aux cas simples et ne pas croire que ceux-ci sont un remède à toutes les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. Comme toute représentation, l'arbre a ses limites et il engendre ou renforce des conceptions réductrices[7], principalement la conception chronologiste. Il existe d'autres représentations, comme les tableaux à double entrée qui, eux aussi, sont une aide efficace à la compréhension de certaines notions en probabilités, mais qui, eux aussi, ont leurs limites et leurs conceptions réductrices.

Exercice d'application

D'après l'exercice commun à tous les candidats du Baccalauréat S, sujet de Nouvelle Calédonie, novembre 1997.

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur. On a constaté que chaque jour entre 11 heures et midi :

a) Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur.

b) Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.

c) Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.

Un client téléphone à l'artisan un jour entre 11 heures et midi.

Si l'on veut aider les élèves à s'approprier cette situation en tant que situation aléatoire, on peut poser la question suivante qui est tout à fait dans l'esprit du programme des classes de Premières : *Indiquer les issues pos-*

[6] La règle 4 est souvent utilisée dans des situations de passage d'un arbre à l'autre encore appelées situations de retournement (ou d'inversion) de l'arbre probabiliste. Elle permet d'illustrer la formule de Bayes.

[7] Voir A. TOTOHASINA dans [9] ou un exercice vécu par J.P.Grangé dans [4].

sibles concernant cette expérience aléatoire.

Pour les correcteurs, il est ensuite préférable d'imposer des notations :

On note P la fonction probabilité associée à cette expérience[8] *et on note :*

- *R l'événement : « le client obtient le répondeur » ;*
- *A l'événement « l'artisan est présent ».*

Pour tout événement X, on note $\overline{X}$ l'événement contraire de X.

L'objectif est de faire trouver aux élèves la probabilité que l'artisan soit présent et on peut s'y prendre de plusieurs façons :

Première façon

celle utilisée par l'auteur de l'énoncé initial :

1°) Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

2°) Exprimer P(R) en fonction de $P_A(R)$, $P_{\overline{A}}(R)$ et P(A).

3°) En déduire l'égalité

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{3}P(A) + 1$$

et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

Ce cheminement choisi pour obtenir P(A) semble prévu pour être résolu sans l'aide de représentations mais principalement en exploitant, grâce à une certaine expérience, les formules de probabilités du programme. Les quelques résultats dont je disposais au moment des corrections montrent que ceci évalue principalement une bonne mémoire et une bonne aptitude au calcul algébrique, mais pas nécessairement une bonne compréhension de la notion de probabilité conditionnelle.

Solution attendue :

1°) D'après l'énoncé, on a :

$$P(R) = \frac{4}{5} \text{ ; } P_A(R) = \frac{1}{3} \text{ et } P_{\overline{A}}(R) = 1.$$

2°) D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap \overline{A})$ et

d'après les probabilités conditionnelles, on obtient :

$$P(R) = P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R)$$

avec $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3°) En utilisant les résultats du 1°), l'égalité précédente devient :

$$\frac{4}{5} = P(A) \times \frac{1}{3} + [1 - P(A)] \times 1.$$

D'où on déduit :

$$\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$$

$$\text{soit } P(A) = -\frac{1}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{10}$$

A l'aide d'un tableau

1°) Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

2°) On pose P(A) = x, exprimer en fonction de x les probabilités $P(A \cap R)$ et $P(\overline{A} \cap R)$.

3°) En déduire P(A).

Ce cheminement pour obtenir P(A) semble prévu pour être résolu avec l'aide d'un tableau car dès qu'on propose au candidat de poser la probabilité marginale P(A) = x, on lui permet de compléter deux cases intérieures du tableau (voir explication ci-dessous). Puis, en appliquant la formule des probabilités totales, de remplir ce tableau en entier, donc de trouver une relation concernant P(A). Dans cette situation, la démarche est très proche de la précédente et elle nécessite aussi plusieurs questions intermédiaires.

[8] Cette précision est indispensable comme on écrit « on note f la fonction définie par … ». Sans cette précision, la lettre P a tendance à être perçue comme une abréviation du mot probabilité, d'autant plus que l'événement de Ω auquel elle s'applique a lui aussi tendance à être confondu avec l'événement au sens familier.

Solution attendue :

1°) D'après l'énoncé, on a :

$P(R) = \frac{4}{5}$; $P_A(R) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{A}}(R) = 1$.

2°) Si on pose $P(A) = x$, on obtient le tableau suivant où l'on a complété en caractères gras la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ ainsi que les probabilités conjointes :

$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = x \times \frac{1}{3}$$

et $$P(\overline{A} \cap R) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = (1-x) \times 1 = 1 - x.$$

	A	$\overline{A}$	
R	$\mathbf{\frac{1}{3}\,x}$	$\mathbf{1-x}$	$\frac{4}{5}$
$\overline{R}$			$\frac{1}{5}$
	x	$\mathbf{1-x}$	1

3°) D'après les résultats précédents, la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R)$$

devient $\frac{4}{5} = \frac{1}{3}x + 1 - x$

ce qui donne $-\frac{1}{5} = -\frac{2}{3}x$

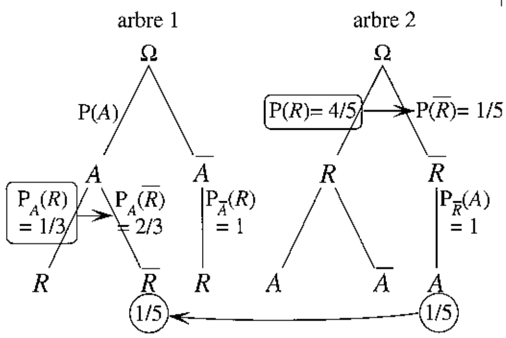
soit $x = \frac{3}{10}$.

A l'aide des arbres

1°) Dessiner deux arbres possibles décrivant cette expérience aléatoire en y faisant figurer les probabilités que l'énoncé permet de connaître, par exemple $P(R) = \frac{4}{5}$.

Ce cheminement, qui impose des arbres pondérés comme outil de résolution, est très directif, mais il est tout à fait dans l'esprit de ce que pourrait être un début d'énoncé de Baccalauréat à partir de la session 1999. La représentation en arbres est tout à fait justifiée ici, car on reconnaît dans l'énoncé des renseignements se traduisant par des probabilités conditionnelles.

Solution attendue :



Le résultat 1/5 obtenu sur le second arbre s'explique par :

$$P(\overline{R} \cap A) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(A) = 1/5$$

D'où la réponse, grâce au premier arbre, en expliquant :

$P(\overline{R} \cap A) = 1/5$

$P(A) \times P_A(\overline{R}) = 1/5$

$P(A) \times 2/3 = 1/5$

$P(A) = 1/5 \times 3/2 = 3/10.$

Regardons un peu, comment ces trois approches de la probabilité sont à l'origine de ces différents cheminements.

Explications

La formalisation est, comme dans tout domaine mathématique, la finalité de cet enseignement des probabilités conditionnelles mais elle n'est peut-être pas le moyen le mieux adapté pour son apprentissage. Elle correspond exactement à la définition telle qu'elle est imposée par les programmes :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est une définition d'essence ensembliste, elle rassure car elle fait penser à un quotient et rappelle, à tort, la formule de Laplace dans le cas d'équiprobabilité $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$. Elle se heurte très vite au vide de connaissances en théorie des ensembles des élèves actuels auxquels on fait croire que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ est une évidence, que l'on justifie parfois comme on peut à partir de la situation concrète de l'énoncé. Il en est de même pour $(A \cup B) \cap B = B$, et que dire des lois de Morgan telles que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ pour lesquelles le retour au diagramme de Venn est le seul recours de l'enseignant, mais est-il apte à convaincre les élèves ?

Le tableau est une représentation assez fréquemment choisie par les enseignants parce que c'est un peu Venn ou plus exactement Karnaugh dans la théorie des ensembles et qu'on le rencontre dans différentes parties des mathématiques comme diagramme de Veitch en algèbre de Boole et comme tableau de contingence et diagramme de Carroll en statistiques et probabilité. Ce dernier diagramme est fondé sur la formule des probabilités totales[10] :

$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$, formule additive, donc très simple d'approche pour les élèves. Elle correspond à la compréhension suivante de la probabilité conditionnelle :

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$ qui se traduit dans le cas où il y a équiprobabilité par $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A \cap B) + \text{card}(\overline{A} \cap B)}$

Son avantage est de ne pas être séquentiel, c'est-à-dire de ne pas induire de chronologie entre certains événements et ses inconvénients majeurs sont :

1°) Il renforce la conception cardinaliste par le calcul systématique d'une probabilité par une fraction.

2°) On ne peut y faire figurer d'une manière simple et pratique des probabilités conditionnelles, ce qui est particulièrement gênant lorsqu'on veut faire comprendre et utiliser cette notion.

L'arbre probabiliste est la représentation la mieux adaptée pour exploiter des probabilités conditionnelles car dans des situations aléatoires chronologistes ou causalistes, il retrace la succession des événements comme ils sont décrits dans l'énoncé. L'arbre correspond davantage à l'écriture suivante qui donne la probabilité conjointe :

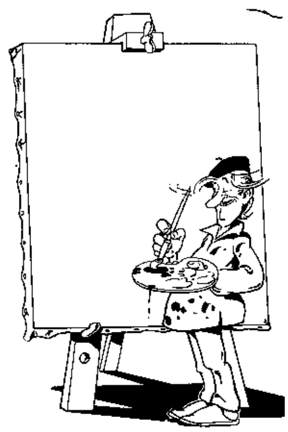
$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ où la probabilité conditionnelle $P_B(A)$ apparaît comme coefficient multiplicateur inférieur à 1, donc réducteur, ce qui est logique puisqu'elle intervient pour calculer la probabilité de $A \cap B$ qui est une partie de B. Il convient également aux situations ensemblistes grâce auxquelles on comprend très bien l'existence de plusieurs arbres pour une même situation aléatoire. Son inconvénient est que, dans des situations chronologistes ou causalistes, il empêche justement de concevoir le second arbre. Ceci correspond à la difficulté épistémologique que rencontrent certains élèves lorsqu'on leur pose la question de déterminer la probabilité d'une cause ayant observé un événement ultérieur.

L'exemple précédent montre comment notre approche personnelle des probabilités influence le questionnement qu'on propose, oriente vers la représentation éventuellement attendue et donc impose la démarche vers la solution.

Conclusion

Pour résoudre un exercice de probabilité, il y a en général une des trois approches décrites précédemment qui est mieux appropriée que les deux autres. L'enseignant doit donc surmonter sa propre approche, qui est souvent inconsciente, pour proposer à ses élèves des exercices où interviennent équitablement ces différentes façons. C'est lorsqu'on a dépassé les différentes façons de concevoir la probabilité qu'on est arrivé au concept mathématique de la probabilité.

[10] La formule des probabilités totales pour un système complet d'événements n'est plus au programme officiel des classes Terminales S depuis 98, mais dans le cas particulier de deux événements et de leurs complémentaires, il semble improbable de s'en passer car c'est la justification des tableaux qui disparaît.



L'enseignant doit donc surmonter sa propre approche, qui est souvent inconsciente,...

L'enseignant doit principalement garder présent à l'esprit que toutes les représentations, aussi pertinentes et formatrices soient-elles, doivent être passsagères pour peu à peu ***laisser place à l'écriture formelle des calculs probabilistes*** *...*

Si on choisit une représentation congrue avec un énoncé, la solution sera plus simple et ne nécessitera pas une résolution comportant des inconnues ou des questions intermédiaires. Parmi ces représentations, les **arbres probabilistes** sont des supports très pertinents pour organiser des données, s'approprier certains énoncés et élaborer les raisonnements à mettre en œuvre, **en particulier en probabilités conditionnelles**. Ils fournissent une aide très efficace à la compréhension des concepts et à l'assimilation des théorèmes ou formules de probabilités.

B. Parzysz dans [8] et dans [1] p. 233 à 238, valide l'arbre en tant qu'outil de résolution de problèmes, en explicite des règles de traitement et de conversion, il en indique la portée et les limites. Il ne faudrait certes pas abuser des arbres car des élèves pourraient croire que l'objet de l'apprentissage est le mode d'emploi des arbres, le concept de probabilité conditionnelle ne serait alors pas acquis. Il y aurait évitement de l'obstacle qui ne serait donc pas surmonté comme le signale M. Henry dans [6].

Il apparaît donc souhaitable que les élèves sachent utiliser d'autres supports visuels comme les **tableaux à double entrée** (diagramme de Carroll) qui ont l'avantage de ne pas être séquentiels. Il semble également souhaitable qu'ils voient l'utilisation des arbres, pondérés ou non, dans d'autres situations, par exemple les dénombrements.

Concernant ces schémas et ces outils en Probabilités, d'importantes questions pédagogiques se posent :

• Notre enseignement peut-il se satisfaire du choix par l'élève de la représentation-outil la mieux adaptée à la situation aléatoire rencontrée ? ou encore ;
• Doit-on enseigner systématiquement ces outils et leurs fonctionnements, et entraîner les élèves à passer de l'un aux autres comme le proposent C. Dupuis et S. Rousset-Bert dans [2] ?

Remarquons que ces questions se posent également en Analyse avec les représentations graphiques et d'autres schémas comme les tableaux de variation.

Il semble que l'enseignant doit principalement garder présent à l'esprit que toutes ces représentations, aussi pertinentes et formatrices soient-elles, doivent être passsagères pour peu à peu **laisser place à l'écriture formelle des calculs probabilistes**, relevant d'une compréhension en profondeur et seule garantie de la validité mathématique des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Commission Inter-IREM « Statistique et Probabilités » : *Enseigner les probabilités au lycée,* juin 1997.

[2] Claire Dupuis et Suzette Rousset-Bert : *Arbres et tableaux de probabilité* in Repères-IREM n° 22, 1996.

[3] Arthur Engel : *L'enseignement des probabilités et de la statistique,* (adapté de l'allemand) CEDIC (épuisé), réédité chez ALEAS, 1975.

[4] Jean-Pierre Grangé : *Probabilité conditionnelle et indépendance,* IREM de Besançon, 1996

[5] Jean-Pierre Grangé : *Arbres et probabilités,* IREM de Besançon, Mars 1999.

[6] Michel Henry : *L'enseignement des probabilités : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*, IREM de Besançon, 1994.

[7] Michel Henry : *L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré,* in Repères-IREM n° 14, 1994

[8] Bernard Parzysz : *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres,* in Repères-IREM n° 10, 1993.

[9] André Totohasina : *Introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence,* in Repères-IREM n° 15, 1994.

STATISTIQUE EN SECONDE

RÉMY COSTE

1 - Introduction : Pourquoi enseigner la statistique

Quelques exemples « vu à la TV », qui soulève des questions que l'on peut aborder en quelques secondes :

• ***Bulletin météo :*** *« nous aurons 2° au-dessus des normales saisonnières »*
2° degrés au-dessus des normales saisonnières, est-ce anormal ?

• ***Ariane 5*** *:* Envoyé spécial France 2, juste avant le cinquième lancement de la fusée Ariane : *«Les ingénieurs sont très tendus, ils savent qu'il y a une chance sur deux pour que le lancement soit un échec. En effet, sur les quatre premiers lancers, deux ont été un échec. »*

La probabilité d'un échec est-elle constante ?

Et même si elle était constante, 2 échecs sur 4 permettraient-ils d'en conclure qu'il y avait 1 chance sur 2 pour qu'il y ait un échec ?

Les 4 lancers représentent un échantillon de quelle population ?

• ***Sécurité routière:*** *« En 1999, les nouvelles mesures de sécurité routière ont permis de sauver 547 vies. »*

Si ces mesures n'avaient pas été prises, aurions-nous observé exactement le même nombre de morts ? Sinon, aurait-il été plus grand ou plus petit ?

2 - Champs pédagogiques de la partie "Fluctuation d'échantillonnage" du programme de seconde :

• ***On connaît la loi de probabilité***, c'est-à-dire que l'on a choisi un modèle théorique dont on connaît la distribution des fréquences :

- On observe et on quantifie expérimentalement la fluctuation sur des échantillons de même taille.

- On observe et on quantifie l'effet de taille sur la fluctuation d'échantillonnage.

• ***On ne connaît pas la loi de probabilité***, on réalise une étude statistique sur des échantillons pour l'estimer, avec toute la prudence qu'impose la fluctuation d'échantillonnage.

• Dans les thèmes d'étude, on exprime cette incertitude par l'utilisation des intervalles de confiance à 95%.

L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une forme simplifiée de l'intervalle :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Cela donne des intervalles très voisins pour $0{,}3 < f < 0{,}7$, et des intervalles trop pessimistes (trop larges) sinon.

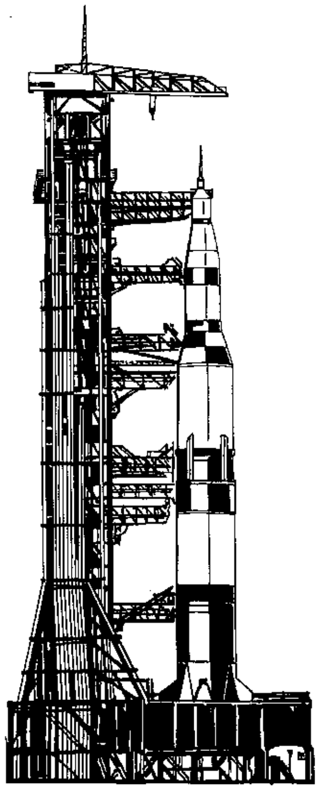
Remarque :

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Leftrightarrow |p - f| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

3 - Quelques brochures pédagogiques pour la classe de seconde

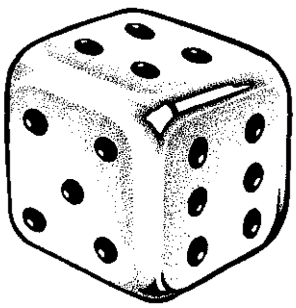
•**11 fiches de statistiques**, dans le document d'accompagnement du programme de seconde.
Egalement disponible sur le site :
http://www.cndp.fr/lycee/maths



Deux sites à ne pas négliger :
http://www.cndp.fr/lycee/maths
http://www.ac-grenoble.fr/maths

** Edition augmentée 2001*
Brochure APMEP n°138

ENSEIGNER LA STATISTIQUE AU LYCÉE : DES ENJEUX AUX MÉTHODES.
Jean-Louis Piednoir
et Philippe Dutartre
IREM Paris Nord 2001
co-diffusion APMEP



• **Statistique en seconde à la rentrée 2000**, brochure de l'APMEP, par Pascale POMBOURCQ*.

• **Statistique de seconde**, brochure de la Régionale APMEP de Grenoble, 22 pages (sans programme)
Disponible sur le site :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/

• **Simulation d'expériences aléatoires pour la classe de seconde**, IREM de Paris Nord (sur TI, Casio, Excel).

• **Statistiques, phénomènes aléatoires, fluctuation d'échantillonnages**, par Alain Soléan, professeur au lycée H. D'Estienne d'Orves à Nice (sur TI).

•**Un livre :**
STATISTIQUE, économie, gestion, sciences, médecine.
Thomas H. et Ronald J. WONNACOTT (ECONOMICA).

• **Une revue :**
LE HASARD
Dossier Pour la Science (Avril 1996)
8 rue Férou, 75278 PARIS Cedex 06.

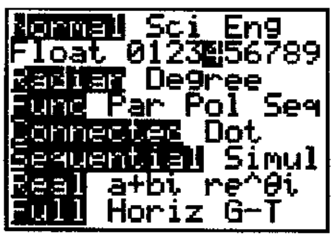
4 - Deux petites astuces pour simuler sans programme

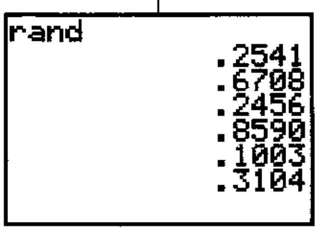
a - Fixer la précision de l'arrondi

Ex 1 : Pile ou face
Régler la calculatrice en mode `Fix 0` puis exécuter la commande `rand`.

Ex 2 : Thème d'étude "Filles et garçons".

Régler la calculatrice en mode `Fix 4`, puis appuyer sur `rand`





Codage : un chiffre pair pour une fille, un chiffre impair pour un garçon. Par exemple, le résultat 0.2541 correspond à une fille (chiffre 2), puis un garçon (chiffre 5). Dès qu'un garçon apparaît (chiffre impair), on arrête.

On peut alors remplir un tableau du type :

F/G	4G	3F1G	2F1G	1F1G	1G	Tot.
Nbre						50

b - Utiliser les listes, la commande Seq, les commandes de test

`Seq(expr, variable, valeur initiale, valeur finale, pas)`

`Seq(N²,  N,  1,  100,  1)` génère la suite des carrés de 1 à 100.

Exemple : Combien de fois **6** dans 100 lancers d'un dé ?
Dans l'écran de calcul, on tape :
`Seq(RandInt(1,6), N, 1, 100, 1) →L1`

Puis `L1`=6 → `L2`

Cette ligne teste si chacun des nombres de la liste 1 est égal à 6, et, pour chacun d'eux, renvoie 1 si c'est le cas et 0 sinon. La liste 2 ne contient donc que des 0 ou des 1. On peut voir le résultat dans l'éditeur de listes (`STAT Edit`).

Puis :

`Sum(L2)`

Cette ligne calcule la somme de la liste L2, donc le nombre de 1, et donc le nombre de 6 de la liste L1.
On peut recommencer en rééditant les lignes précédentes avec

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

tapé plusieurs fois.

5 - Exemples d'activités utilisant un programme

Programme SONDAGE
(voir en annexe)

- Réaliser 10 sondages de taille 100, représenter chaque fois la proportion observée et l'intervalle de confiance.
- Quelles sont les valeurs extrêmes parmi les 10 valeurs obtenues, l'étendue ?
- Combien d'intervalles ne contiennent pas la valeur 55% ?
- Mêmes questions sur l'ensemble des résultats de la classe.
- Recommencer avec des échantillons de taille 250.

Programme SONDAGE2
(voir en annexe)

- Réaliser 10 sondages de taille 100, représenter à chaque fois la proportion observée et l'intervalle de confiance.
- Si la vraie propostion est dans **tous** les intervalles, quelles sont les valeurs possibles ?
- Dévoiler la valeur en tapant :
  `P × 100 ENTER`
- La vraie proportion se trouve dans combien d'intervalles ?
- Pour combien d'élèves la vraie proportion se trouve dans les 10 intervalles à la fois ?

Programme MENDEL
(voir en annexe)
Sur 132 croisements

Observé	35	67	30
Théorique	33	66	33

- Exécuter 10 fois le programme et noter les résultats obtenus dans un tableau comme ci-dessous :

A	B	C	$\lvert A-33\rvert$	$\lvert B-66\rvert$	$\lvert C-33\rvert$	Somme
35	67	30	2	1	3	6

- Combien de résultats sont meilleurs que celui obtenu par Mendel ?
- Dans la classe, combien de résultats sont meilleurs que celui obtenu par Mendel ?
- Refaire un tableau, en prenant le critère des carrés :

A	B	C	$(A-33)^2$	$(B-66)^2$	$(C-33)^2$	Somme
35	67	30	4	1	9	14

On pourra utiliser les listes de la calculatrice : on rentre les valeurs de A–33, B–66 et C–33 dans les listes 1, 2 et 3. On redéfinit ces listes en demandant le calcul des carrés des valeurs, puis on définit la liste 4 comme la somme des listes 1, 2 et 3.
On classe la liste 4 par ordre croissant. Conclusion.

Programme TOSCANE
(voir en annexe)
a - Expérience réelle
En dehors de la classe

- Lancer les trois dés jusqu'à ce qu'on obtienne 10 sommes égales à 9 ou à 10, en notant le nombre de sommes égales à 9, et celui de sommes égales à 10.
- Se regrouper à trois, quatre ou cinq élèves et calculer, parmi l'ensemble des sommes égales à 9 ou 10 obtenues, la proportion de 9 et de 10. Laquelle de ces sommes a-t-elle été la plus fréquente ?
- Calculer et représenter, sur le même graphique, les 12 intervalles de confiance à 95%.

En classe
On recopie dans un tableau les proportions observées par chaque groupe, et le nombre d'élèves de chaque groupe.

(*Tableau page suivante*)

Proportion de 9	0,54	....	...
Proportion de 10	0,46	....	...
Effectif	40	....	...

- Combien de groupes ont obtenu plus de sommes 10 que de sommes 9 ?
- Comment calculer les proportions globales de 9 et de 10 ?
- Calculer et représenter, sur le même graphique, les 2 intervalles de confiance à 95%.

b - Simulation sans programme

```
Seq(RandInt(1,6)
 +RandInt(1,6)
 +RandInt(1,6),I,1,100,1)
                         → L1
L1=9  → L2
L1=10  → L3
Sum(L2)  → S
Sum(L3)  → T
```

- Calculer S+T, S/(S+T) et T/(S+T)
- Se regrouper à trois ou quatre élèves et calculer, parmi l'ensemble des sommes égales à 9 ou 10 obtenues, la proportions de 9 et de 10. Laquelle de ces sommes a été la plus fréquente ?
- Calculer et représenter, sur le même graphique, les deux intervalles de confiance à 95%.

b' - Simulation avec programme

- Exécuter le programme TOSCANE (voir en annexe) en prenant N = 50 (= S+T).
- Suivre le même plan de travail.

Epilogue :

On démontre que la proportion théorique de la somme 9 est de 0,481 et que celle de la somme 10 est de 0,519.

- Avec les listes de la calculatrice (ou mieux, avec un tableur), calculer le rayon et les bornes des intervalles de confiance à 95% lorsque N (nombre total de sommes égales à 9 ou 10) est égal à 20, 50, 100, 500, 1000, 5 000.
- Représenter, pour chaque valeur de N, les deux intervalles de confiance sur le même graphique.

ANNEXE 1
Descriptifs de programmes de simulations d'expériences aléatoires

N.B. Les programmes ci-joints (saisis sur une TI 83) sont groupés en un seul fichier PRGMSTAT.83G. Avec le logiciel TI Graph Link pour TI83, il faut les dégrouper puis les transférer sur une TI83 (câble Graph Link nécessaire).

Pour lancer un programme `PRGM`, puis sélectionner le programme, puis `ENTER`

Pour **interrompre** un programme : `ON`

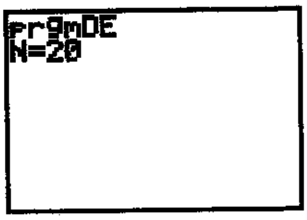
Pour **relancer** un programme : `ENTER`

Programmes de base :

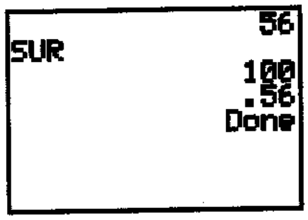
Ces programmes sont destinés à être expliqués par le professeur, puis saisis par les élèves pour une utilisation dans un T.D.

On trouvera le détail de ces programmes en **annexe 2.**

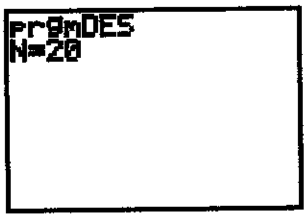
DE : Lance un dé cubique N fois, affiche après chaque lancer, le nombre de 6 sortis et le nombre de lancers effectués, puis, à la fin, la fréquence finale.

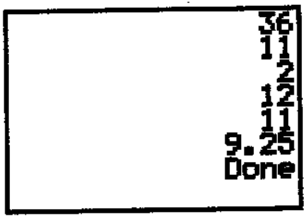


PIECE : Lance une pièce N fois, affiche, après chaque lancer, le nombre de PILES sortis et le nombre de lancers effectués, puis, à la fin, la fréquence finale.



DES : Répète N fois de l'expérience suivante : Lance un dé jusqu'à ce que le 6 apparaisse, affiche le nombre de lancers qui ont été nécessaires.
Affiche à la fin, le nombre moyen de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le 6.





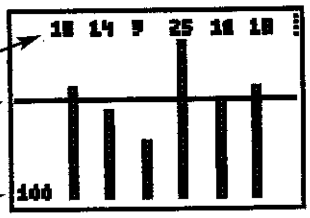
Programmes plus complets :
Ces programmes sont destinés à être transférés sur les calculatrices des élèves par le câble (ou bien sur celles d'une valise achetée par le lycée), pour une utilisation dans un T.D., ou bien être utilisés par le professeur pour animer sa classe.
Remarque : certains programmes modifient la configuration de la calculatrice. Pour la restituer après utilisation du programme, il faut aller dans les menus **Mode** et/ou **Format**.

DE6 : Lance 1 dé cubique N fois. On visualise la progression du nombre de sorties des différentes faces

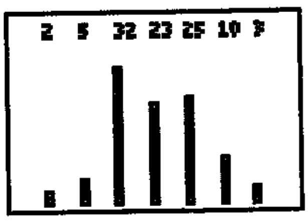
Effectifs de chaque face

1/6ème de l'effectif total

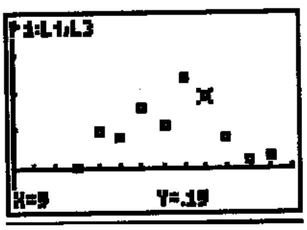
Nombre de tirages

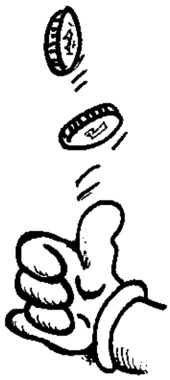


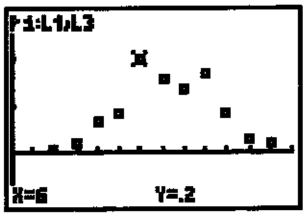
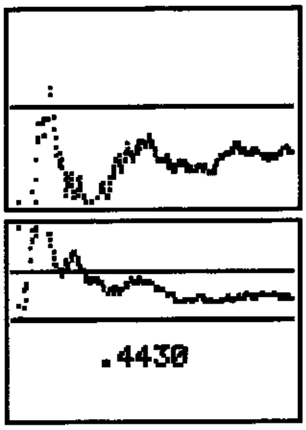
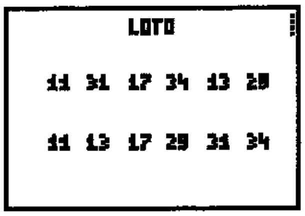
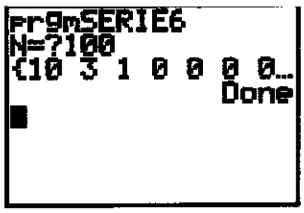
GALTON : Simulation du lâcher de 100 billes sur une planche de Galton à 7 niveaux. On voit les billes s'empiler et les effectifs s'afficher



SOMME4 : Effectue N lancers de 3 dés tétraédriques, calcule à chaque fois la somme des faces, puis représente graphiquement la distribution des fréquences.





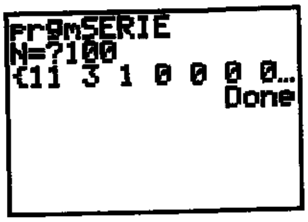
SOMME6 : Effectue N lancers de 2 dés cubiques, calcule, chaque fois la somme des faces, puis représente graphiquement la distribution des fréquences	
PILE : Lancer d'une pièce 300 fois, et affichage de l'évolution de la fréquence des Piles sortis depuis le début. La droite affichée a pour équation $y = 0,5$. Il faut exécuter la commande `ClrDraw` entre chaque exécution si on veut effacer le graphe précédent (mais c'est intéressant d'en superposer quelques-uns). **PILE2** : Même programme que le précédent avec un partage d'écran, ce qui permet d'afficher la valeur de la fréquence.	
LOTO : A chaque appui sur Entrée, un numéro apparaît. Puis la liste s'ordonne. On peut rechercher la fréquence de 2 bons numéros, de 3 bons numéros, des tirages avec 2 numéros consécutifs, 3 numéros consécutifs, etc.	
SERIE6 : Ce programme simule le tirage au sort d'une série de N lancers du dé, puis compte le nombre de singletons de 6, de doubletons de 6, de triplets de 6, etc. contenus dans la série obtenue. La série de N lancers est mémorisée dans L1. Le programme affiche la liste L2 dans laquelle il y a : le nombre de singletons de 6, puis celui de doubletons de 6, de triplets de 6, etc.	 *Exemple*

Par exemple, si L1 = {4 6 2 5 1 6 6 2 3 5 5 6 6 6 4 6 4 6 6}, on aura
L2 = {2 2 6 1 0 0 0 0 ...},
soit 2 singletons, 2 doubletons et 1 triplet.

Dans l'exemple ci-contre, on a effectué 100 lancers du dé, on a obtenu 10 singletons de 6, 3 doubletons de 6 et 1 triplet de 6.

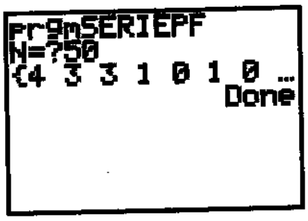
SERIE : Ce programme est une variante du précédent : il détecte tous les doubletons, tous les triplets, etc. quelle que soit leur valeur.

Ci-contre : on a effectué 100 lancers du dé, on a obtenu 11 doubletons, 3 triplets et 1 quadruplet.

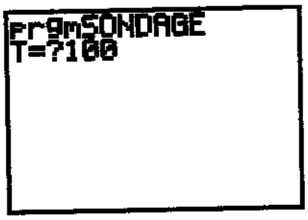


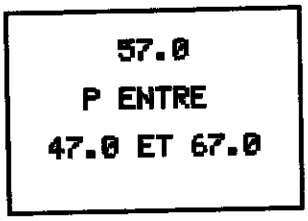
SERIEPF : Ce programme est encore une variante de SERIE6, mais avec une pièce : il détecte tous les doubletons de PILES ou de FACES, tous les triplets de PILES ou de FACES, etc.

Ci-contre : on a effectué 50 lancers de la pièce, on a obtenu 4 doubletons, 3 triplets, 3 quadruplets, 1 quintuplet et 1 septuplet.



SONDAGE : On suppose que, dans la population, il y a 55% d'avis favorables à une personnalité (P = 0,55). Ce programme simule un sondage sur un échantillon de taille N, calcule le pourcentage F d'opinions favorables observées sur cet échantillon, et donne l'intervalle de confiance à 95%.



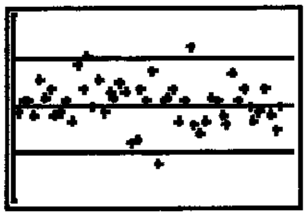


En exécutant plusieurs fois ce programme en prenant N = 100, on pourra observer l'étendue des valeurs obtenues, la valeur médiane, le nombre de résultats à plus de 2 points du pourcentage réel, l'écart moyen, etc. On pourra représenter graphiquement les résultats de ces expériences : en abscisse, le numéro de l'échantillon, en ordonnée la proportion observée. On tracera pour chaque échantillon, un segment centré sur le point du graphique et représentant l'intervalle de confiance. Lorsque le vrai pourcentage sera dévoilé (voir remarque plus haut), on pourra compter les intervalles qui ne contiennent pas la vraie valeur. On recommencera avec des échantillons de taille 500.

SONDAGE2 : Cette fois, on ne connaît pas la proportion réelle. Le programme choisit au hasard une proportion P, comprise entre 0,3 et 0,7 pour que la formule simplifiée $\left[f - \frac{1}{\sqrt{N}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$ reste valable. Le programme boucle en gardant la valeur de P.

Attention : si le programme est interrompu, une nouvelle valeur de P est générée. On ne dévoile la proportion réelle qu'à la fin de l'étude en interrompant le programme (appuyer sur ON), et en tapant : `P × 100   ENTER`.

PILFACE : Toujours sur le thème « Intervalle de confiance », ce programme répète 50 fois l'expérience suivante : Il simule 100 fois le lancer d'une pièce, calcule la fréquence de PILES obtenus, trace le point de coordonnées (I, f), où I est le numéro de l'expérience et f la fréquence calculée.



Les droites d'équations y = 0,5 (fréquence théorique),

$$y = 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{100}} \quad \text{et } y = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{100}}$$

(soit $y = 0{,}4$ et $y = 0{,}6$) correspondant aux bornes de l'intervalle de confiance, sont également tracées. On peut ainsi observer le nombre de points en dehors de la bande.

Remarque : En principe, lors d'une étude statistique, les intervalles de confiance sont centrés sur chacune des proportions observées sur les échantillons, et on espère que la vraie proportion (celle du modèle théorique), qui est inconnue, est dans cet intervalle. Ici, par souci de simplicité, on a centré tous les intervalles sur la valeur théorique 0,5.On pourra démontrer (ou faire démontrer) aux élèves que :

$$0{,}5 \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{N}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$$

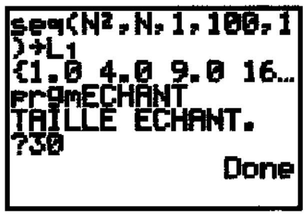
$$\Leftrightarrow f \in \left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{N}}\ ;\ 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$$

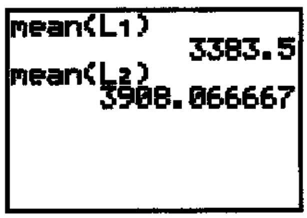
$$\Leftrightarrow |0{,}5 - f| < \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Si on modifie, dans le programme, le nombre de lancers, il faut aussi modifier les bornes de l'intervalle de confiance.

ECHANT : Une liste de valeurs étant entrée dans L1, le programme tire au hasard un échantillon de taille P et le place dans L2. Ce programme est utile pour toutes sortes de test de fluctuation d'échantillonnage (NB : sur TI82 ou TI80, la dimension d'une liste ne peut excéder 99, sur TI83, c'est 768).

Exemple : On rentre les carrés des 100 premiers nombres entiers dans L1 (avec la commande `Seq`, voir en annexe 3), et on extrait avec ECHANT un échantillon de taille 30. On compare la moyenne de l'échantillon L2 avec celle de la population L1.

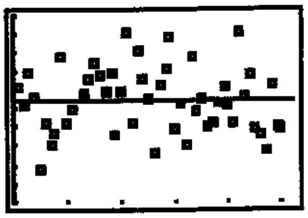




ECHCARRE : Automatise et répète ce qui est écrit dans l'exemple ci-dessus (carré des 200 premiers nombres dans L1, tirage au sort de 50 échantillons de taille 30), et visualise au fur et à mesure les moyennes des échantillons obtenus. A la fin, s'affiche la droite d'équation :

y = moyenne de (L1)

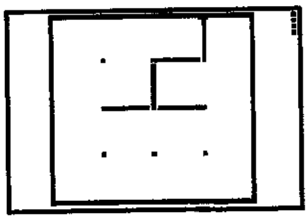
afin de comparer les moyennes des échantillons avec celle de la population. A l'écran, Y varie entre 8 000 et 18 000 (la moyenne des 200 premiers carrés est égale à 13 433,5).

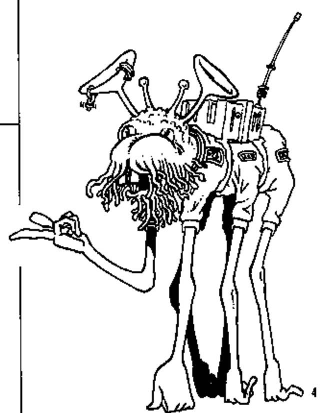


TELEPATH : Ce programme termine une activité dont le scénario est le suivant :
Un élève A lance une pièce à l'abri du regard d'un élève B qui doit donner le résultat, ceci 50 fois de suite. On calcule ensuite le pourcentage de bonnes réponses de B. On peut ensuite remplacer A par la calculatrice (qui simule le lancer de pièce), l'élève B devine. Pour estimer s'il faut s'étonner de certains taux de réussite (et donc d'en conclure à des pouvoirs télépathiques de B), on permute les rôles : un élève A lance la pièce et la calculatrice « devine » le résultat (elle simule un choix au hasard).

Le programme TELEPATH remplace à la fois A et B sur 20 séries de 50 lancers, visualise le taux de réussite au fur et à mesure. La droite horizontale visualise un taux de 50% de réussite, les graduations verticales sont de 10%. On voit bien qu'un taux de réussite de 60% n'a rien d'exceptionnel.

ROBOT : Simulation d'une promenade aléatoire. Un robot est sur une table carrée et avance dans les quatre directions de façon aléatoire. Arrivé au bord, il tombe et la partie s'arrête. Le nombre de pas effectués s'affiche. On appuie sur **ENTRÉE** pour repartir.
Le problème posé aux élèves est le suivant : Si on convient que j'ai gagné la partie lorsque le robot fait au moins quatre pas avant de tomber, quelles sont mes chances de gagner ? On essaie de savoir par une étude statistique.





MENDEL : Mendel, célèbre scientifique, père de la génétique, a fait de nombreuses expériences pour convaincre de la validité des lois de la génétique qu'il avait établies. Par exemple, le croisement de "**Aa**" avec "**Aa**" donne, selon sa thèse, une descendance théorique de "**AA**", "**Aa**" et "**aa**" dans les proportions 1, 2, 1.

Sur les 132 croisements observés par Mendel, il a obtenu la répartition 35, 64, 30, à comparer avec la proportion théorique 33, 66, 33. Est-ce un "bon" résultat ?

Pour le savoir, on prend l'hypothèse que la proportion théorique 1, 2, 1 est correcte, on simule 132 croisements, on observe la distribution obtenue, et on la compare à la distribution théorique.

Le programme Mendel réalise cette simulation, affiche les valeurs obtenues et les écarts entre ces valeurs et les valeurs théoriques. Il permet de recommencer l'expérience un grand nombre de fois.

Il reste à convenir d'un critère pour établir dans quel cas on a obtenu un résultat meilleur ou moins bon que celui de Mendel. Un premier choix possible est le suivant : en notant A, B, C les valeurs obtenues, on peut calculer :

$$|A-33|+|B-66|+|C-33|.$$

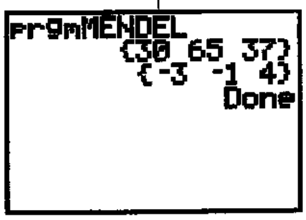
L'utilisation des listes de la calculatrice ou d'un tableur permet d'automatiser le calcul de ce nombre. On peut alors compter combien de fois on a obtenu un meilleur résultat que Mendel.

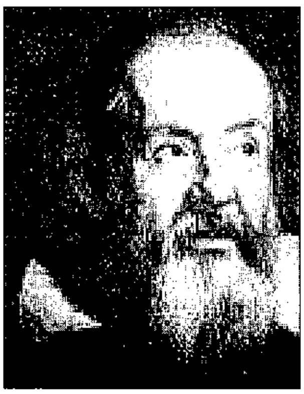
Remarques :

1 - On peut également rajouter dans le programme, la ligne :

```
Disp
abs(A-33)+abs(B-66)+abs(C-33)
```

2 - Un autre critère peut être également $(A-33)^2+(B-66)^2+(C-33)^2$ où l'on reconnaît le carré de la distance euclidienne dans un repère orthonormal. Obtient-on le même classement ?



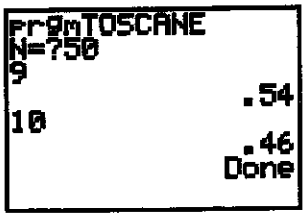


Galilée (1564 - 1542)

TOSCANE : Le Duc de Toscane a remarqué que lorsqu'on lance trois dés, la somme des 3 faces est plus souvent 10 que 9. Cela lui semblait contradictoire. En effet, d'après lui, la somme 9 ou la somme 10 s'obtiennent de 6 façons différentes :
Somme 9 : 126-135-144-225-234-333
Somme 10 : 136-145-226-235-244-334.
A ses yeux, les sommes 9 et 10 ont donc les mêmes chances d'être obtenues.
Galilée, dans un texte lumineux, donna l'explication : chacune des possibilités énumérées ci-dessus n'a pas les mêmes chances de se produire. Il faut imaginer que l'on peut différencier les trois dés (en les supposant de couleurs différentes par exemple).

Le résultat 126 a six manières de se produire : 126-162-216-261-612-621.
Le résultat 144 a trois manières de se produire : 144-414-441.
Le résultat 333 n'a qu'une manière de se produire : 333.
On trouve ainsi que la somme 9 peut se produire de **25** manières différentes, toutes avec les mêmes chances, mais la somme 10 peut se produire de **27** manières différentes.
Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Nous voyons que l'écart entre les chances d'obtenir 9 et 10 est faible ! Comment alors le Duc de Toscane a-t-il pu observer expérimentalement ce résultat au point que cela l'a perturbé ?

Après une étude réelle (que l'on peut réaliser à la maison, avec mise en commun des résultats), le programme TOSCANE permet de faire porter l'étude sur un plus grand nombre d'expériences. Il simule les lancers de 3 dés, calcule à chaque fois la somme, comptabilise le nombre de fois où les sommes 9 et 10 sont obtenues. Lorsqu'on a obtenu N sommes égales à 9 ou 10, le programme affiche la fréquence de chacune d'elles.



En effectuant des séries de 100 lancers, on pourra observer le nombre de fois où la fréquence de la somme 9 est effectivement inférieure à celle de la somme 10.

Epilogue

La répartition théorique des sommes 9 et 10 est $\frac{25}{52}$ et $\frac{27}{52}$ soit 0,481 et 0,519.

Si l'on prend $\frac{1}{\sqrt{N}}$ comme rayon de l'intervalle de confiance, on trouve :

N	**10**	**20**	**50**	**100**	**500**	**1000**	**5000**
$\frac{1}{\sqrt{N}}$	0,316	0,223	0,141	0,1	0,0447	0,0316	0,0141
Intervalle de confiance pour S = 9	0,165 0,797	0,258 0,704	0,340 0,622	0,381 0,581	0,4381 0,5275	0,4494 0,5126	0,4669 0,4951
Intervalle de confiance pour S = 10	0,203 0,853	0,296 0,742	0,378 0,660	0,419 0,619	0,4743 0,5637	0,4874 0,5506	0,5049 0,5331

Remarque : Pour obtenir N sommes égales à 9 ou 10, il faut lancer $4N$ fois les dés environ !

ANNEXE 2
Les programmes de base

Programme DE	**Commentaires**
O → P	Initialise le compteur P à 0
Input "N=", N	Demande le nombre N de lancers
For(I,1,N)	Début de la boucle répétée N fois
If randInt(1,6)=6 (*)	Test : Si le nombre entier tiré au hasard entre 1 et 6 est égal à 6
Then	Alors
P+1 → P	Augmente le compteur P de 1
End	Fin du test
ClrHome	Efface l'écran
Disp P, "SUR", I	Affiche la valeur de P, SUR, le nombre de tirages déjà effectués I
End	Fin de la boucle
Disp P/N	Affiche le quotient P/N c'est-à-dire la fréquence

(*) sur TI82, taper : `If Int(rand*6)+1=6`

Programme PIECE	Commentaires
O→P	Initialise le compteur P à 0
Input "N=",N	Demande le nombre N de lancers
For(I,1,N)	Début de la boucle répétée N fois
If randInt(0,1)=0 (*)	Test : si le nombre entier tiré au hasard entre 0 et 1 est égal à 0
Then	Alors
P+1→P	Augmente le compteur P de 1
End	Fin du test
ClrHome	Efface l'écran
Disp P,"SUR",I	Affiche la valeur de P, SUR, le nombre de tirages déjà effectués I
End	Fin de la boucle
Disp P/N	Affiche le quotient P/N, c'est-à-dire la fréquence

(*) Sur TI82, taper : `If Int(rand*2)=0`

Programme DES	Commentaires
ClrList	Efface le contenu de la liste L1
Input "N=",N	Demande le nombre N de lancers
For(I,1,N)	Début de la première boucle répétée N fois
O→P:O→R	Initialise le compteur P à 0, initialise la valeur de R à 0
While R<6	Début de la deuxième boucle répétée tant que R<6
randInt(1,6)→R (*)	Range le nombre entier tiré au hasard entre 1 et 6 dans R
P+1→P	Augmente le compteur de tirages nécessaires de 1
End	Fin de la deuxième boucle
P→L1(I)	Range le nombre de tirages nécessaires P dans la liste L1
Disp P	Affiche le nombre de tirages nécessaires P
End	Fin de la première boucle
Disp mean(L1)	Affiche la moyenne de la liste L1.

(*) Sur TI82, taper : `If Int(rand*2)=0`

ANNEXE 3
Où trouve-t-on les instructions sur la calculatrice ?

Les commandes entre crochets s'obtiennent par la touche 2.

TI 80, 82, 83			
→	♣	ClrList et SortA	A
Input, Disp, ClrHome	K I/O	seq et dim	= OPS
For, If, End et Then	K CTL	mean	= MATH
Lbl, Goto et Stop	K CTL	L1 et L2	' et ≤
Rand	I PRB	Xmin, Xmax etc.	Λ Window
RandInt(TI 80 et 83) (*)	I PRB	DrawF,	Φ DRAW
Int	I NUM	Pt-On	Φ POINTS
=, <	Δ	ClrAllLists	↓
and	Δ LOGIC		

(*) Sur TI82, remplacer les commandes : RandInt(0,n) par Int(Rand*(n+1))
RandInt(1,n) par Int(n*Rand)+1

Rappel : pour **interrompre** un programme : **ON** Pour **relancer** un programme : **ENTER**

ANNEXE 4
Une commande bien pratique pour créer une suite : Seq

Syntaxe : **Seq(expression, nom de la variable, valeur initiale, valeur finale, pas)**

Sur TI 83, le pas n'est pas indiqué, il est égal à 1 par défaut.

Exemples : **Seq(N²,N,1,100,1)** génère la suite des carrés des entiers de 1 à 100

Seq(N,N,1,100,1) génère la suite des entiers de 1 à 100

Seq(N,N,1,100,1)→L1 remplit la liste L1 des entiers de 1 à 100.

Seq(RandInt(1,6),N,1,100,1) génère une liste aléatoire de nombres entiers de 1 à 6.

CONFORMITÉ D'UNE PROPORTION, QUELLE DÉMARCHE?

G.R.E.S.

Le « test de conformité d'une proportion », figure dans le programme du module D11 (Mathématiques appliquées et statistiques) en filière BTS de l'enseignement agricole. Sa mise en œuvre avec les étudiants n'est pas toujours sans embûche dès qu'il s'agit de déterminer la loi de probabilité à partir de laquelle on élabore la règle de décision.

L'objectif de l'article est de présenter trois possibilités d'élaboration de cette règle : à partir de la loi de probabilité « exacte » de la variable de décision retenue ou d'une loi normale qui permet d'approcher les valeurs numériques de la loi « exacte », l'approximation étant réalisée avec puis sans correction de continuité.

Exercice

Une machine est considérée opérationnelle si sa fabrication ne contient pas plus de 6% de pièces défectueuses.

On prélève au hasard dans cette fabrication un échantillon de 200 pièces. La fabrication étant supposée de grande taille, on admet que cet échantillon est un échantillon aléatoire simple. Il contient 17 pièces défectueuses.

Est-il possible, au seuil de risque 0,05, de conclure que la machine n'est pas opérationnelle ?

Notations :

Soit p la proportion de pièces défectueuses de la fabrication. Ce nombre p est une *valeur certaine* mais *inconnue*.

Soit F la variable aléatoire qui, pour chaque échantillon aléatoire simple de taille 200, extrait de la fabrication, prend pour valeur la *proportion* de pièces de cet échantillon qui sont défectueuses.

Première proposition de corrigé

Nous envisageons dans cette proposition de prendre en compte la loi de probabilité « exacte » de la variable de décision retenue en mettant en œuvre un **test binomial**, qui n'est *pas explicitement au programme* du module D11.

1. ***Formulation des hypothèses du test:***

$\mathbf{H_1}$: "la machine n'est pas opérationnelle" (hypothèse déduite de la question posée),

$\mathbf{H_0}$: "la machine est opérationnelle".

C'est-à-dire $H_1 : p > 0{,}06$;
$H_0 : p = 0{,}06$.

2. ***Nature du test*** :

D'après la formulation de H_1 le test est **unilatéral** à droite.

3. ***Variable de décision sous*** H_0 :

La variable aléatoire nF, que nous notons X, est la variable aléatoire qui, pour chaque échantillon aléatoire simple de taille 200, extrait de la fabrication, prend pour valeur le *nombre* de pièces de cet échantillon qui sont défectueuses. Cet échantillon étant un échantillon aléatoire simple, X est de loi *binomiale*.

Sous **l'hypothèse** $\mathbf{H_0}$, la variable aléatoire X est de loi binomiale $B(n\ ;\ p_0)$ avec $n = 200$ et $p_0 = 0{,}06$.

→ Choisissons X pour variable de décision.

Cet article est extrait du bulletin n°10 du Groupe de Réflexion sur l'Enseignement de la Statistique dans l'enseignement agricole (GRES).
Adresse du site : http://enfa.mip.educagri.fr/enfadraf/gres/.

ENFA : Ecole **N**ationale de **F**ormation **A**gronomique.
G.R.E.S. Groupe de **R**éflexion sur l'**E**nseignement des **S**tatistiques. (dans l'enseignement agricole)

4. ***Valeur critique*** :
Le seuil de signification du test est $\alpha = 0{,}05$. Le test est unilatéral à droite. Donc la valeur critique pour X est le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \geqslant k) \leqslant 0{,}05$.
Ce nombre, que nous notons k_c, est donc le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X < k) \geqslant 0{,}95$ c'est-à-dire tel que $P(X \leqslant k - 1) \geqslant 0{,}95$ car X est une variable aléatoire *discrète*.

• ***Usage du tableur Excel pour déterminer*** k_c :
Détermination par balayage :

	1	**2**	**3**
1		n	200
2		p	0,06
3			
4		$k-1$	$P(X \leqslant k-1)$
5		17	0,9429
6		18	0,9672

LOI.BINOMIALE(LC(-1);L1C3;L2C3;1)

Détermination directe :

	1	**2**	**3**
1		n	200
2		p	0,06
3		$1-\alpha$	0,95
4			
5		$k_c - 1$	18

CRITERE.LOI.BINOMIALE(L1C3;L2C3;L3C3)

On obtient donc $k_c = 19$. C'est la valeur critique pour la variable aléatoire X.

5. ***Règle de décision*** :
Relativement à la variable X, la zone de rejet de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 0,05 est [19 ; 200].

6. ***Décision*** :
L'échantillon prélevé contient 17 pièces défectueuses. Ce nombre n'appartient pas à la zone de rejet de H_0 . Donc, au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, il n'y a pas lieu de rejeter H_0.

Au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, on ne peut pas conclure que la machine n'est pas opérationnelle.

Deuxième proposition de corrigé

Dans la démarche précédente, nous avons utilisé la loi de probabilité « exacte » de la variable de décision retenue. La taille de l'échantillon prélevé est assez grande ($n = 200$) pour envisager une approximation de cette loi par une loi normale.
La mise en œuvre « usuelle » d'un test de conformité d'une proportion consiste à réaliser une approximation sans correction de continuité de la loi de probabilité « exacte » de la variable aléatoire discrète F par une loi normale. On peut présenter cette mise en œuvre de la façon suivante :

Mêmes étapes **1.** et **2.** que dans la première proposition de corrigé.

3. ***Variable de décision sous*** $\mathbf{H_0}$:
Sous **l'hypothèse** $\mathbf{H_0}$, nF est de loi binomiale $B(n\ ;\ p_0)$ avec $n = 200$ et $p_0 = 0{,}06$.
L'espérance et la variance de nF sont respectivement :
$E(nF) = np_0$ et $V(nF) = np_0(1 - p_0)$.
Donc celles de F sont respectivement :
$E(F) = p_0 = 0{,}06$

et $V(F) = \dfrac{p_0(1 - p_0)}{n} = 0{,}000282$.

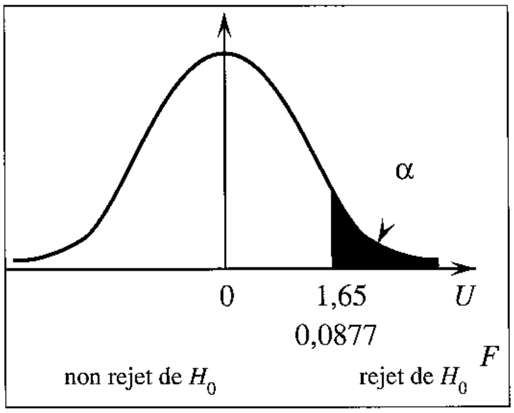
→ Choisissons F pour variable de décision.

n **est assez grand** pour admettre que la loi de probabilité de la variable aléatoire F peut être approchée par une loi normale.

Sous **l'hypothèse** $\mathbf{H_0}$,, cette loi est la loi normale $N(0{,}06\ ;\ \sqrt{0{,}000282}\ )$.

Il en résulte que la variable aléatoire U, définie par $U = \dfrac{F - 0{,}06}{\sqrt{0{,}000\,282}}$, est approximativement de loi normale $N(0\,;\,1)$.

4. ***Schéma de décision et valeur critique*** :
Il s'agit de représenter graphiquement le seuil de signification α du test et la zone de rejet de H_0 et de déterminer la valeur critique pour U.



Seuil de signification : $\alpha = 0{,}05$.
Le test est unilatéral à droite.
D'après la table de la fonction de répartition de U :

$$P(U > 1{,}64) > 0{,}05$$
$$P(U > 1{,}65) < 0{,}05$$

La valeur critique pour U est donc 1,65.
D'où la valeur critique pour F :

$$0{,}06 + 1{,}65 \times \sqrt{0{,}000\,282} = 0{,}0877$$

à 10^{-4} près

5. ***Règle de décision*** :
Relativement à la variable F, la zone de rejet de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 0,05 est $[0{,}0877\,;\,1]$.

6. ***Décision*** :
La proportion de pièces défectueuses dans l'échantillon prélevé est égale à 17/200 soit 0,085.
Cette proportion n'appartient pas à la zone de rejet de H_0.
Donc, au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, il n'y a pas lieu de rejeter H_0.

Au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, on ne peut pas conclure que la machine n'est pas opérationnelle.

Troisième proposition de corrigé

L'application de la **correction de continuité** lors de l'approximation de la loi de probabilité de F par une loi normale, permet "d'améliorer" cette approximation. On peut alors présenter la mise en œuvre du test de la façon suivante :
Mêmes étapes **1.** et **2.** que dans la première proposition de corrigé.

3. ***Variable de décision sous*** $\mathbf{H_0}$:
Sous **l'hypothèse** $\mathbf{H_0}$, la variable aléatoire nF, que nous notons X, est de loi binomiale $B(n\,;\,p_0)$ avec $n = 200$ et $p_0 = 0{,}06$. L'espérance mathématique et la variance de X sont respectivement :
$E(X) = np_0 = 12$

et $V(X) = np_0(1 - p_0) = \sqrt{11{,}28}$.

$\to$ Choisissons X pour variable de décision.
n **est assez grand** pour admettre que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi normale. Sous **l'hypothèse** $\mathbf{H_0}$, cette loi est la loi normale $N(12\,;\sqrt{11{,}28}\,)$.
Soit Z une variable aléatoire de loi normale $N(12\,;\,\sqrt{11{,}28}\,)$. Il en résulte que la variable aléatoire U définie par $U = \dfrac{Z - 12}{\sqrt{11{,}28}}$ est de loi normale centrée réduite $N(0\,;\,1)$.

4. ***Valeur critique pour X*** :
Le seuil de signification du test est $\alpha = 0{,}05$. Le test est unilatéral à droite. Donc, la valeur critique k_c pour la variable aléatoire X est le plus petit nombre entier naturel non nul k, tel que

$P(X \geqslant k) \leqslant 0{,}05$.

En appliquant la correction de continuité lors de l'approximation de la loi de probabilité de X, on a :

$$P(X \geqslant k) \approx P(Z > k - 0{,}5).$$

Donc la valeur critique k_c est le plus petit nombre entier naturel non nul k tel que $P(Z > k - 0{,}5) \leqslant 0{,}05$ c'est-à-dire tel que $P(U > \frac{k - 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}28}}) \leqslant 0{,}05$.

La fonction de répartition de U est **strictement croissante**, donc k_c est le plus petit nombre entier naturel non nul k tel que $\frac{k - 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}28}} > 1{,}65$, soit $k > 18{,}04$. D'où $k_c = 19$. La valeur critique pour X est 19.

5. ***Règle de décision*** :

Relativement à la variable X, la zone de rejet de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 0,05 est [19 ; 200].

6. ***Décision*** :

L'échantillon prélevé contient 17 pièces défectueuses. Ce nombre n'appartient pas à la zone de rejet de H_0. Donc, au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, il n'y a pas lieu de rejeter H_0.

Au seuil de risque 0,05, au vu des 200 observations, on ne peut pas conclure que la machine n'est pas opérationnelle.

Conclusion

Pour comparer ces trois démarches, on peut, par exemple, exprimer la zone de rejet de l'hypothèse relativement à la variable aléatoire binomiale nF :

Démarche	Zone de rejet de H_0
1) Approximation (numérique) de la loi de nF sans correction de continuité.	[18 ; 200]
2) Approximation (numérique) de la loi de nF avec correction de continuité.	[19 ; 200]
3) Pas d'approximation de la loi de nF.	[19 ; 200]

Par contre, si l'on choisit $p_0 = 0{,}05$ alors $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0{,}0154$ à 10^{-4} près.

Dans ce cas, la zone de rejet de H_0 est la même pour les trois démarches, à savoir [16 ; 200].

En poursuivant la simulation à l'aide d'un tableur, on observe que pour certaines valeurs de p_0, la zone de rejet de H_0 est la même pour les trois démarches et que pour d'autres valeurs de p_0, la zone de rejet de H_0 déterminée par la première démarche contient celle qui est déterminée par les deux autres démarches.

Alors, quelle attitude adopter face à nos étudiants dans le cadre d'un test de conformité d'une proportion ?

Cette présentation peut, par exemple, être faite lors d'une séance de travaux dirigés avec l'outil informatique (usage d'un tableur) ou la calculatrice (avec loi binomiale intégrée), d'autant plus que la démarche mise en œuvre ici est conforme à la méthodologie exposée dans les recommandations pédagogiques qui accompagnent ce programme.

5765 D436

INTERVALLE DE CONFIANCE D'UNE PROPORTION

G.R.E.S.

Rappel de notations

Dans une population, le pourcentage des individus qui possèdent un caractère A est p.
On prélève dans cette population un échantillon aléatoire simple de taille n.
On appelle f le pourcentage d'individus possédant le caractère A dans l'échantillon et F la variable aléatoire d'échantillonnage correspondante.

Problème

Nous allons traiter le cas où n est "*grand*".*
Dans ce cas donc, la loi de probabilité de F est approximativement la loi normale de moyenne p et d'écart-type :

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

On note u le nombre tel que

$$\Phi(u) = 1 - \alpha/2$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On a alors :

$$p\left(p - u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < F < p + u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

d'où

$$p\left(F - u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < F + u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Cette dernière égalité ne permet pas de construire un intervalle de confiance pour p, car celui-ci figure dans les trois membres de la double inégalité.

Comment faire ?

Dans certains ouvrages, on lit :

"On ne connaît pas p, mais on en connaît une estimation, c'est f. On remplace donc p par f dans les bornes de l'intervalle et l'on obtient un intervalle de confiance à (1 – α) avec la formule : (2)

$$\left[f - u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; f + u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]"$$

Il y a là une sorte de tour de passe-passe un peu rapide. Essayons d'aller plus loin.

Une autre possibilité consiste à trouver un intervalle indépendant de p contenant, quel que soit p, l'intervalle :

$$\left[F - u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; F + u\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Pour cela, il suffit de remarquer que, pour tout p, $p(1-p)$ est inférieur à 1/4.
On obtient donc l'intervalle de confiance aléatoire :

$$\left[F - \frac{u}{2\sqrt{u}} \; ; F + \frac{u}{2\sqrt{u}}\right]$$

on est sûr que :

$$p\left(F - \frac{u}{2\sqrt{u}} < p < F + \frac{u}{2\sqrt{u}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

mais la précision (c'est-à-dire l'amplitude de l'intervalle) n'est pas la meilleure.

Remarque : Ce résultat permet de comprendre la formule donnée dans le premier Thème de Statistique du **nou-**

(*) Que se passe-t-il pour les petits échantillons ? Les lois normales ne seraient plus d'un grand secours. Il faudrait donc travailler avec des lois binomiales.

veau programme de Seconde, applicable à la rentrée 2000. Dans l'explication de ce thème consacré aux "fourchettes" ou intervalles de confiance d'une proportion, on lit :

"... on incitera les élèves à connaître l'approximation usuelle de la fourchette au niveau de confiance 0,95, issue d'un sondage sur n individus (n > 30) dans le cas où la proportion observée $\widehat{p}$ est comprise entre 0,3 et 0,7, à savoir

$$\left[\widehat{p}-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\widehat{p}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]"$$

$\widehat{p}$ représente la proportion constatée sur l'échantillon et n la taille de l'échantillon. On comprend donc la simplification du 1,96 (notre u pour 95%) avec le 2 du dénominateur.

Une autre solution consiste à résoudre de manière rigoureuse la double inéquation en p de la relation (1) :
l'événement

$$-u<\frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<u$$

est égal à l'événement

$$\left(\frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)^2<u^2$$

nous allons résoudre cette inéquation du second degré en p, qui peut s'écrire :

$$(n+u^2)p^2-(2nF+u^2)p+nF^2<0.$$

Le coefficient du terme du second degré de ce trinôme du second degré en p est strictement positif, donc, si le discriminant de ce trinôme est positif, l'ensemble des valeurs de p solutions de l'inéquation est l'ensemble des valeurs comprises entre les deux racines du trinôme.

Calculons le discriminant :
$\Delta=(2nF+u^2)^2-4(n+u^2)nF^2$
$\Delta=4n^2F^2+4nFu^2+u^4-4n^2F^2$
$\quad -4nu^2F^2$
$\Delta=4nu^2F(1-F)+u^4$
F prenant des valeurs comprises entre 0 et 1, cette quantité est strictement positive, donc le trinôme admet les deux racines suivantes :

$$\frac{(2nF+u^2)-\sqrt{4nu^2F(1-F)+u^4}}{2(n+u^2)}\text{ et}$$

$$\frac{(2nF+u^2)+\sqrt{4nu^2F(1-F)+u^4}}{2(n+u^2)}$$

d'où l'intervalle de confiance :

$$\left[\frac{(2nf+u^2)-\sqrt{4nu^2f(1-f)+u^4}}{2(n+u^2)}\ ;\ \frac{(2nf+u^2)+\sqrt{4nu^2f(1-f)+u^4}}{2(n+u^2)}\right]$$

en essayant de simplifier un peu ces expressions (division par $2n$ des numérateurs et dénominateurs et extraction de u des radicaux) on obtient : (3)

$$\left[\frac{f+\frac{u^2}{2n}-u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}+\frac{u^2}{4n^2}}}{1+\frac{u^2}{n}}\ ;\ \frac{f+\frac{u^2}{2n}+u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}+\frac{u^2}{4n^2}}}{1+\frac{u^2}{n}}\right]$$

On constate que, pour obtenir l'intervalle de confiance (2), on est amené à négliger certains termes(*).
Lorsqu'on utilise la formule :

$$\left[f-u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f+u\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

on procède à deux approximations : l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, et le fait de négliger certains termes dans la formule (3).

C'est pour cette raison que, dans certains ouvrages(**), on préconise les conditions suivantes :

$$nf\geqslant 20\text{ et }n(1-f)\geqslant 20.\ (4)$$

Remarque : Le problème qui se pose

(*) Si on appelle $[a_n\ ;\ b_n]$ l'intervalle (2) et $[a'_n;b'_n]$ l'intervalle (3), on démontre assez facilement que (a_n-f) et (a'_n-f) d'une part, (b_n-f) et (b'_n-f) d'autre part, sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

(**)P. DAGNELIE : *Statistique Théorique et Appliquée.*

ici est de nature très différente de celui qui se pose pour l'intervalle de confiance d'une moyenne lorsque l'écart type de la population n'est pas connu. Ce qui fait la spécificité du cas des proportions est le fait que p se trouve dans les trois membres de l'inégalité, il ne s'agit donc pas de remplacer, dans les deux membres extrêmes p par son estimation f ni $\frac{p(1-p)}{n}$ par son estimation, qui serait $\frac{f(1-f)}{n-1}$ (en utilisant un estimateur non biaisé), ni $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ par une estimation.

Il est d'ailleurs à remarquer que, s'il est pratique de dire aux élèves pour une moyenne, lorsque l'écart type de la population n'est pas connu : « *on remplace σ par son estimation et on utilise une loi de Student* », ceci ne correspond pas à la réalité mathématique qui est derrière(*). De plus, S est un estimateur biaisé de σ.

(*) cf. Bulletin du GRES n° 7 : *"Résumé sur les lois de probabilité"*

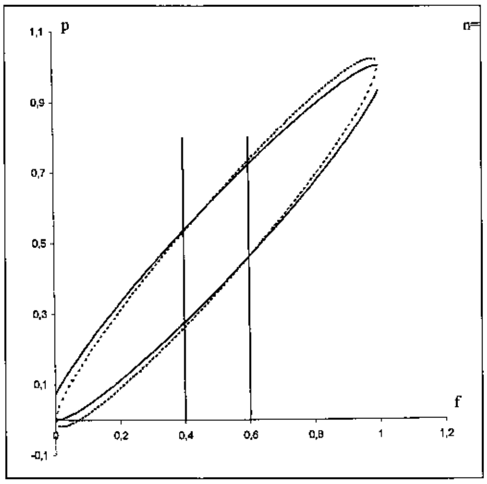
Exemple : déterminons les intervalles de confiance avec les formules (3) puis (2) pour un échantillon sur lequel on a constaté une proportion $f = 0{,}8$, le premier de taille 50, le deuxième de taille 100. On obtient :

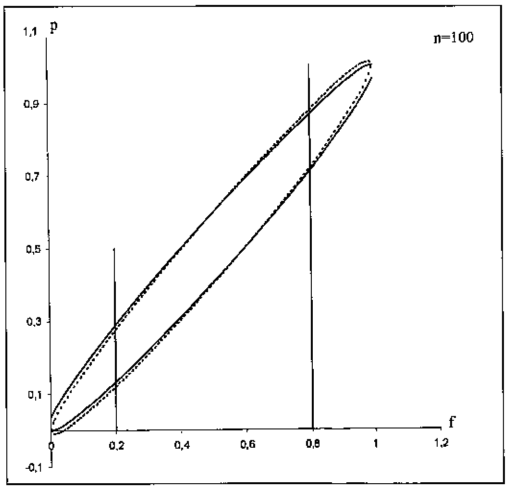
taille 50 : [0,669 6 ; 0,887 6]
et [0,689 1 ; 0,910 9]
pour l'approximation.

taille 100 : [0,711 2 ; 0,866 6]
et [0,721 6 ; 0,878 4]
pour l'approximation.

On constate une meilleure approximation pour $n = 100$.

A titre d'exemple, les deux graphiques qui suivent, réalisés avec Excel, représentent, pour $n = 50$ et $n = 100$, les courbes donnant p en fonction de f, en traits pleins, les bornes des intervalles de confiance à 95% calculées avec la formule (3), et en traits interrompus avec la formule (2).
Les traits verticaux correspondent aux conditions (4).





GREI : **G**roupe de **R**éflexion sur l'**E**nseignement de l'**I**nformatique
http://enfa.mip.educagri.fr/grei/liens.html
GRES : Groupe de **R**éflexion sur l'**E**nseignement des **S**tatistiques.
http://enfa.mip.educagri.fr/enfadraf/gres/gres.html

LE NOUVEAU PROGRAMME DE SECONDE AVEC CABRI

JEAN-JACQUES DAHAN

http://www.irem.ups-tlse.fr/Groupes/MathInfo.html

Sur le site internet de l'Irem de Toulouse, cet Atelier est disponible à l'adresse ci-dessus en cliquant sur Atelier Nice.
Une expérimentation ou une validation est disponible en direct pour chaque paragraphe.

* *Enseigner et pratiquer les mathématiques avec Cabri.*
IREM de Toulouse - 2002

A propos de Cabri :
CAhier de
BRouillon
Interactif

Version de démonstration téléchargeable à partir de : http://www.cabri.net

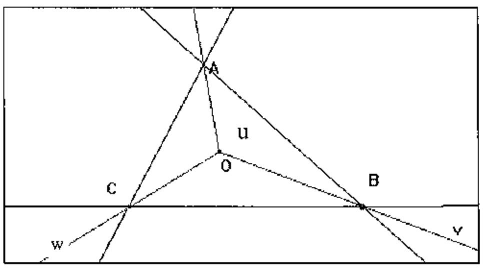
Montrer comment le logiciel de géométrie dynamique peut être utilisé pour enseigner les nouveaux programmes de seconde était l'objectif ambitieux de cet atelier. Le temps qui m'était imparti pour présenter le fruit de mon travail (une brochure de l'IREM de Toulouse alors en cours d'écriture maintenant publiée) m'a obligé à faire un choix que je résume ici.*

Cabri peut être une aide véritable à la résolution de problèmes

Avant d'aborder l'utilisation de Cabri dans nos gestes d'enseignants, il m'a paru pertinent de convaincre mes interlocuteurs enseignants que Cabri était un outil puissant pour résoudre des problèmes de mathématiques et en particulier des problèmes qui soient de vrais problèmes, c'est-à-dire qui nécessitent une vraie recherche où Cabri va jouer, sous notre impulsion, un rôle décisif aussi bien au niveau de l'appropriation du problème qu'à celui des chances de réussite.

1 - Le problème proposé (une construction sous contrainte) :

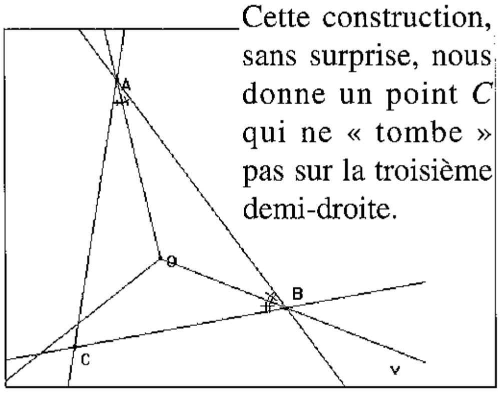
Construire un triangle ABC dont les bissectrices intérieures $[Ou)$, $[Ov)$ et $[Ow)$ sont données.



Ce problème, je me le suis posé à moi-même comme un défi parce que je sentais que l'environnement Cabri allait me permettre de « faire des choses » alors que jamais dans un environnement papier-crayon je ne me serais mis dans une telle situation.

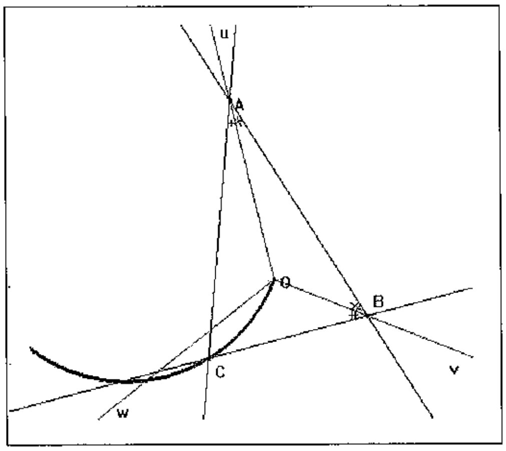
2 - Compte rendu de ma recherche (partie 1)

• ***Analyse :*** A une homothétie près, si solution il y a, elle est unique ; je vais donc choisir arbitrairement un point A sur la demi droite $[Ou)$.
Ne sachant où choisir le point B, je décide de le positionner arbitrairement sur la seconde demi-droite $[Ov)$; je sais qu'éventuellement je pourrais modifier ma position si l'envie me venait et je sais, qu'avec Cabri, cette envie viendra.
Enfin, si A et B étaient les deux premiers sommets d'un triangle-solution, la construction de C s'en suivrait immédiatement : en effet, si $[Ou)$ et $[Ov)$ étaient les deux premières bissectrices intérieures du triangle ABC, C serait à l'intersection des droites symétriques de (AB) respectivement par rapport aux axes portés par ces demi-droites.



Cette construction, sans surprise, nous donne un point C qui ne « tombe » pas sur la troisième demi-droite.

Nous essayons donc de changer B de place sur la demi-droite $[Ov)$. Sur la figure ci-dessous on a laissé les traces des positions intermédiaires de B et de C.



Il semble donc qu'il existe une position de B amenant C sur $[Ow)$.

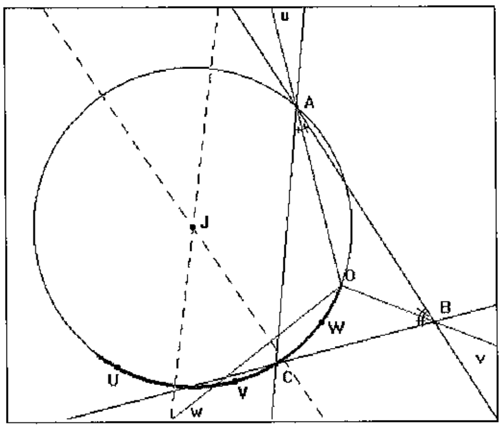
Nous allons examiner de plus près la trace laissée par C en faisant affficher le lieu des points C quand B parcourt la demi-droite $[Ov)$.

Il semblerait que ce lieu soit un arc de cercle ayant O pour l'une de ses deux extrémités.

Pour valider cette conjecture, nous avons construit le cercle passant par trois points quelconques de ce lieu U, V et W.

Ce cercle, centré en J, intersection des médiatrices de $[UV]$ et $[VW]$ semble bien contenir notre lieu et, en plus, il a l'air de passer par A.

Si, dans un second temps, on déforme la figure en faisant tourner la demi-droite $[Ov)$ autour de O, ces observations perdurent et même beaucoup



mieux ; l'animation nous permet de rajouter deux autres conjectures dont une capitale pour la résolution de notre problème : **le point J semble bien être aligné avec O et B.**

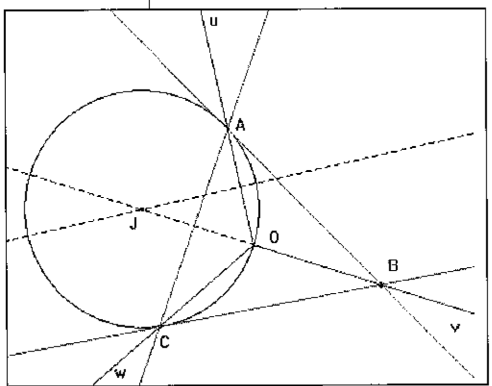
La deuxième extrémité de l'arc détecté plus haut semble être le symétrique de A par rapport à J.

Résultat de l'analyse : A étant donné, si un triangle-solution existe, on doit l'obtenir par la procédure suivante :
On construit le cercle passant par A et O, centré sur le support de $[Ov)$ en un point qu'on nommera J.
L'intersection de ce cercle avec $[Ow)$ donne C.
Le point B est sur le support de la demi-droite $[Ov)$.

Compte rendu de ma recherche (partie 2) :

Synthèse :

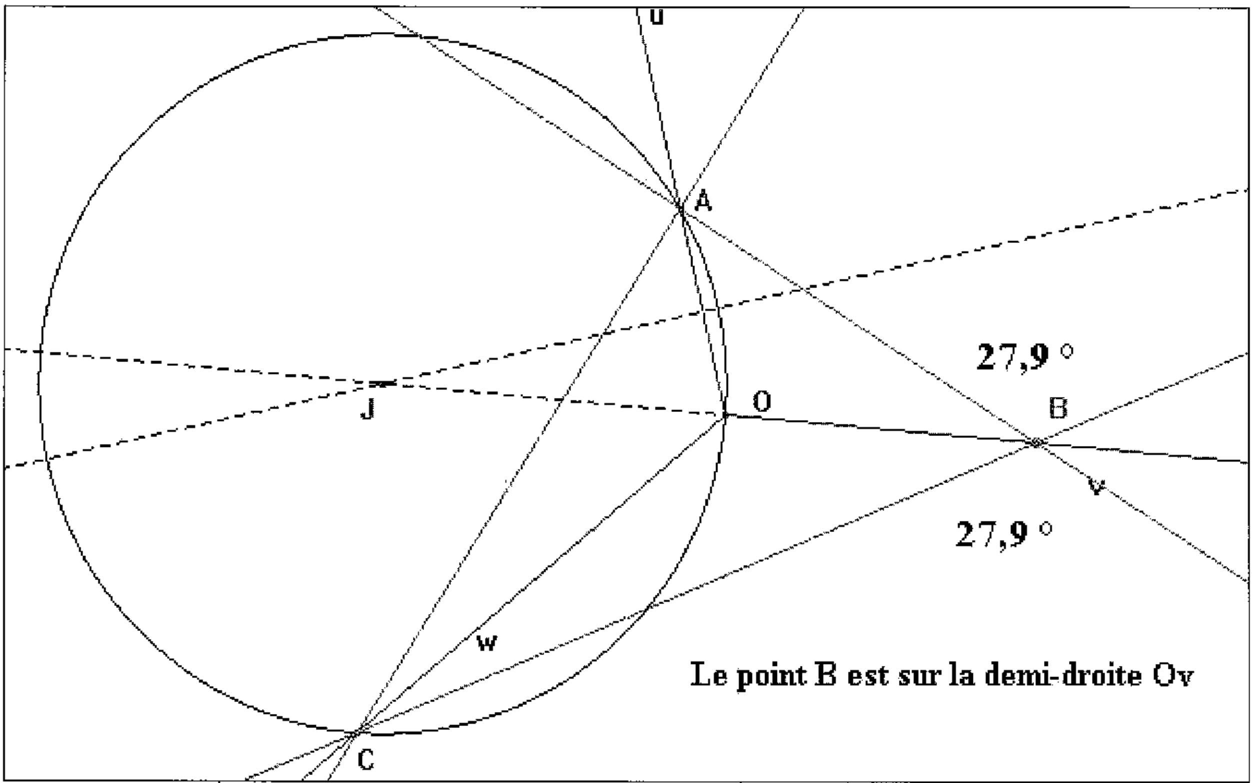
Donnons-nous un point A sur $[Ou)$.

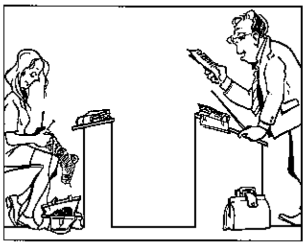


Construisons J intersection de la médiatrice de $[OA]$ et du support de $[Ov)$. Construisons le cercle de centre J et passant par O et A. Ce cercle coupe $[Ow)$ en C. Complétons le triangle par le point B intersection des deux droites respectivement symétriques de (AC) par rapport à $[Ou)$ et $[Ow)$.

Le point B devrait appartenir à la demi-droite $[Ov)$. Demandons-le au logiciel qui répond affirmativement, même si on bouge les paramètres de la figure.

On vérifie aussi, avec le logiciel, que $[Ov)$ est bien la bissectrice de l'angle ABC en affichant les mesures des deux autres angles ABO et ABC qui restent bien les mêmes si nous modifions les positions des points ou droites variables.





Un cours magistral participatif ?

Résultat de la synthèse : Il semblerait que notre problème admette bien une solution qui est celle mise en évidence dans l'analyse et confortée par la synthèse. Même si le pouvoir de conviction de cette démarche est très fort : c'est la démarche expérimentale menée en sciences ; les physiciens tiendraient le résultat pour bon jusqu'à preuve du contraire ; nous, il nous reste l'étape ultime de la validation : la démonstration.

Compte rendu de ma recherche (partie 3) :

Démonstration : Inutile de préciser que j'ai eu très envie de démontrer ce résultat ; j'y ai consacré quelques moments en attaquant le problème sous des angles différents, mais sans succès. J'ai posé ce problème autour de moi sous une forme classique et une de mes collègues, formatrice associée de l'IUFM de Toulouse, Nicole GILABERT, a trouvé une solution élémentaire utilisant les angles inscrits et les triangles semblables. Vous trouverez cette solution dans la brochure dont il a été question plus haut.

Cabri pour introduire la notion de fonction et les notions attachées

Introduire la notion de fonction est un souci de l'enseignant de seconde, que ce soit sous forme d'activité introductive dévolue aux élèves ou sous forme d'exposé magistral participatif. Le problème est le temps, si on fait exception des contraintes techniques : comment gérer son temps dans l'environnement informatique pour rendre pertinente l'utilisation de cet environnement ? Il est important, dans un premier temps, de montrer ce que l'on peut faire d'élémentaire (pour le connaisseur) et de nouveau (pour le néophyte) afin de pouvoir envisager un nouveau type de transposition.

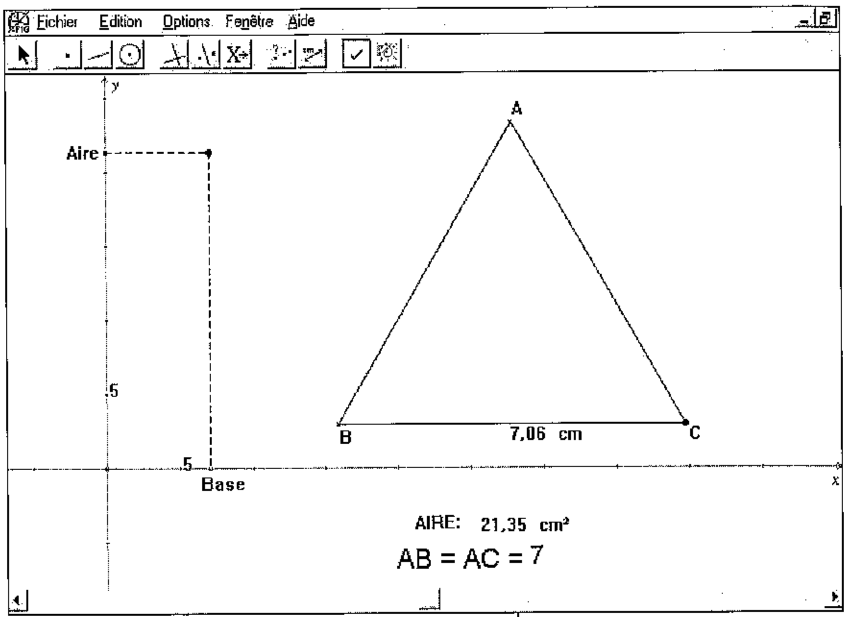
1 - Problème de maximisation d'une aire.

Peut-on construire un triangle *ABC* isocèle en *A*, d'aire maximum ? Si oui, comment ?

2 - Aborder ce problème avec Cabri.

Construction de la figure-fichier :

On construit un triangle isocèle ABC où $AB = AC$ (cette mesure est affichée et peut être modifiée). On s'arrange pour que le triangle soit déformable en tirant sur C : seule la longueur BC est modifiable par cette action.

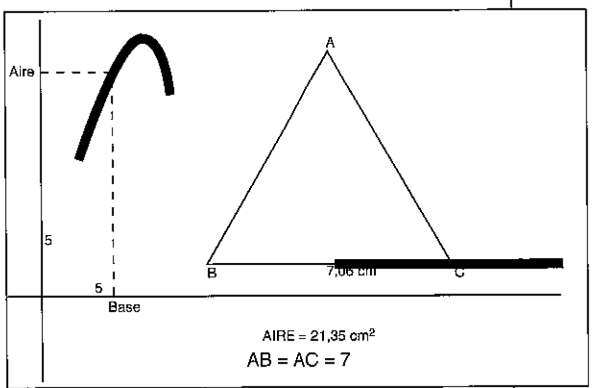


Dans le repère affiché on transfère en abscisse la longueur BC et en ordonnée l'aire du triangle ABC pour construire un point M de la courbe de la fonction donnant l'aire en fonction de la base BC.

Après cette phase de construction, toujours capitale dans Cabri, car les manipulations qui vont être possibles vont dépendre de ces constructions, vient la phase de traitement dynamique.

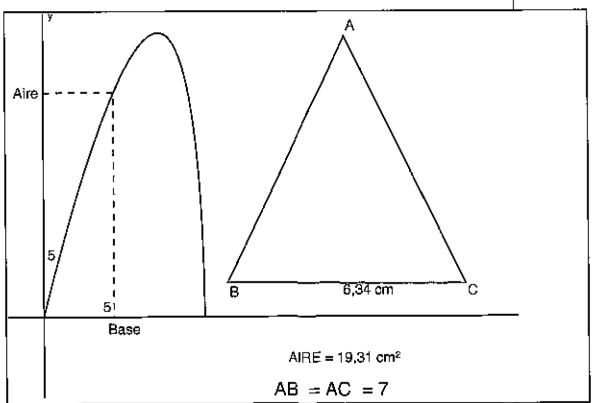
Manipulations (presque tout s'anime) :

Ici, on a tiré sur le point C, ce qui provoque le changement de position du point M de notre courbe qui commence à apparaître car nous avons demandé au logiciel de laisser les traces de ces deux points au cours de leurs déplacements.

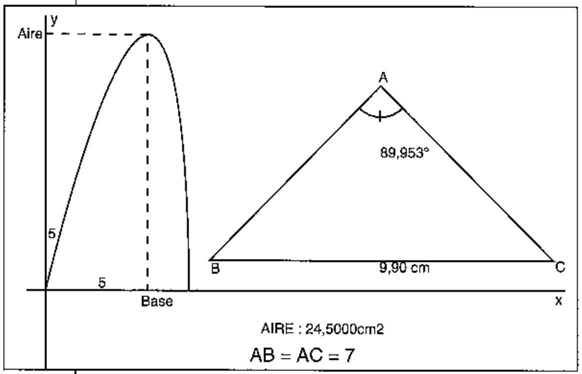


La courbe complète a été obtenue comme le lieu des points M quand C parcourt la demi-droite horizontale sur laquelle il a été créé.

Quand on tire maintenant sur C, on peut visualiser comment l'aire varie en fonction de la base.

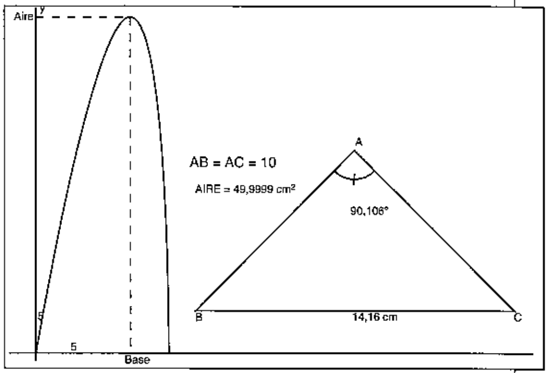


On peut maintenant tirer sur le point C jusqu'à obtenir une aire maximum. Ceci est présenté dans les deux cas de figures mais il est bien entendu que l'on peut modifier la longueur de $[AB]$ autant de fois que l'on veut pour tester toute conjecture qui pourrait nous apparaître.



L'aire maximum est obtenue quand on atteint le sommet de la courbe et l'angle ABC semble droit.

Conjecture : Il semblerait donc que notre triangle ait une aire maximum quand l'angle BAC est droit.



Mêmes observations

Démonstration : Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice (Elle figure dans la brochure IREM citée précédemment).

Demander à des élèves de venir à bout de la construction du triangle animable n'est pas réaliste dans une phase de découverte ou d'initiation de Cabri ; on peut concevoir de la faire réaliser en module. Par contre, la construction du point générique de la courbe, puis l'obtention de cette dernière sous forme de trace ou de lieu me paraît un bon travail sur la notion de fonction ; la répétition de cette construction chaque fois que l'élève rencontre ce type de problème me semble un excellent travail sur le concept de fonction. Enfin, arriver à tout faire concevoir par un élève ou un groupe d'élèves permettra de s'assurer qu'un travail de modélisation et d'abstraction a été mené avec succès. Un long chapitre de la brochure montre d'ailleurs comment on peut tracer des courbes de fonctions définies formellement.

Que peut-il sortir d'une boîte noire ?

***TICE** : Techniques d'Information et de Communication dans l'Education*

Cabri pour inverser les problèmes avec les boîtes noires

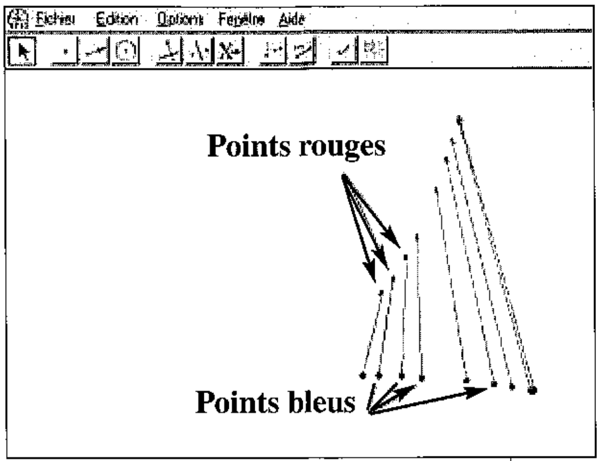
1 - Qu'est-ce qu'une boîte noire ?

Lorsqu'on se donne une transformation connue du plan, on sait quels sont les effets de cette transformation sur droites, cercles, sur le parallélisme, sur l'orthogonalité, sur l'éventuelle conservation des distances ou des angles. Mais si une transformation est donnée de façon inversée, c'est-à-dire par la connaissance de ses effets et que l'objectif fixé est la reconnaissance formelle de cette transformation, on est en face d'un problème spécifiquement TICE, c'est-à-dire réservé au domaine de résolution des Nouvelles Technologies. Ce problème, dont un exemple est donné ci-après se nomme « Boîte Noire » dans tous les cadres possibles et pas seulement dans le cadre géométrique (un exemple est d'ailleurs développé dans ma brochure).

La boîte noire proposée :

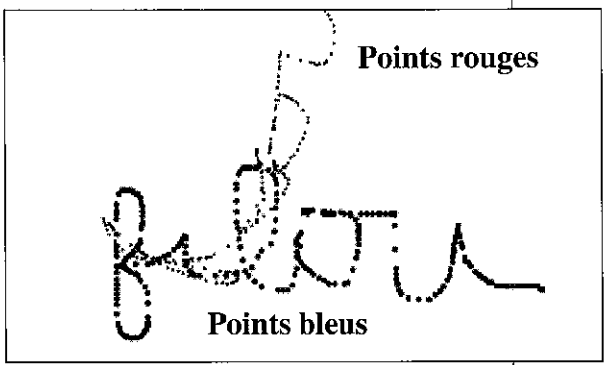
Le point bleu et gras donne le point rouge par une transformation non précisée. On peut tirer sur le point bleu et son image sera réactualisée.

Pour l'instant, il est seulement question de se familiariser avec le travail qu'on est amené à fournir devant une telle tâche afin, dans un second temps, de voir comment on peut utiliser avec les élèves les nouveaux exercices qu'il faudra concevoir à partir de cette nouvelle activité.

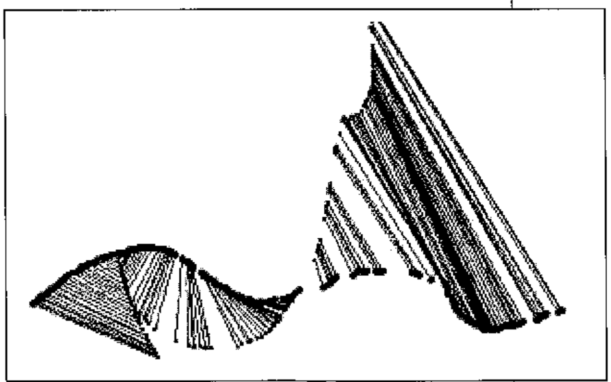


Quelques manipulations qui peuvent aider à analyser la transformation donnée :

On a tiré sur le point bleu en écrivant « filou » et on observe ce qu'écrit le point rouge. Cette manipulation permet de se faire une petite idée de la réponse si jamais celle-ci était visuellement et dynamiquement trouvable.

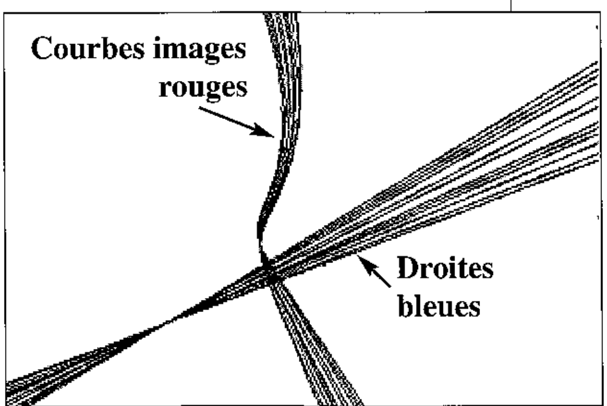


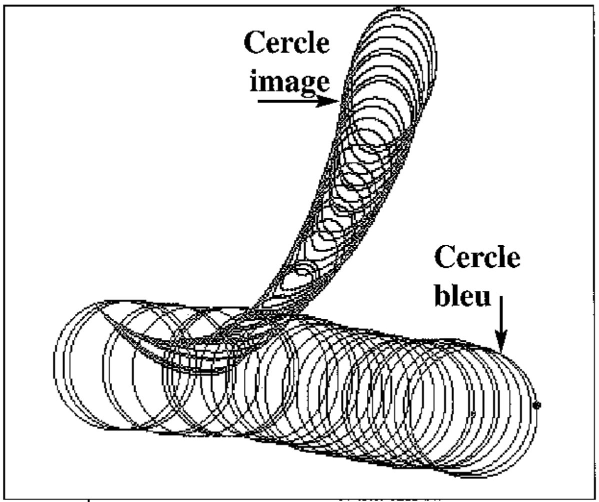
On a refait la même chose ici, mais en faisant décrire au point bleu une courbe qu'on trace à la souris. Comme sur la figure précédente, on a demandé l'activation des points bleus et rouges pour voir leurs traces au cours de leurs mouvements. On a fait de même pour les segments joignant les points à leurs images.



On a mis le point bleu sur une droite bleue et on a demandé le lieu du point rouge quand le point bleu parcourt la droite bleue. Nous avons obtenu en rouge la courbe image de la droite bleue par la transformation cachée.

On a modifié la position de la droite bleue afin de voir comment se modifiait son image.





Même procédure que pour l'activité précédente, mais cette fois en mettant le point bleu sur un cercle bleu.
On a ensuite tiré sur le cercle bleu pour voir comment évoluait son image.

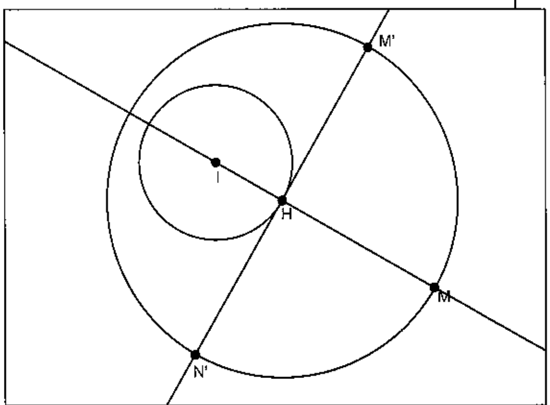
Il est évident qu'à ce stade, on se rend compte que la transformation cachée est une transformation non classique qui va être difficile à débusquer bien que la construction géométrique qui m'a permis de la créer soit, on le verra plus loin, simple. J'espère que le professeur arrivera à prendre conscience, dans ce problème, combien il est difficile d'attaquer un problème quand on se sent désarmé, comme peuvent l'être nos élèves devant nos propositions de recherche.
Même pour ce type de travail, il va falloir mettre au point des stratégies, dégager des méthodes pour montrer qu'en réalité nous sommes surarmés, et c'est ce qui fait notre faiblesse.

3 - Solution de cette boîte noire

Tracer un cercle centré en I.
Définir un point libre **M** et le tracer en gras.
Tracer la droite (IM)

- Tracer la perpendiculaire à (IM) passant par H, point d'intersection du cercle et de la droite (IM) avec H entre I et M.

Tracer le cercle de centre H et de rayon HM.
Demander l'intersection de ce dernier cercle avec la perpendiculaire tracée ci-dessus.



Deux points apparaissent : nommez-les respectivement M' et N' sur la figure.

La transformation qu'il fallait trouver est celle qui transforme M en M'.

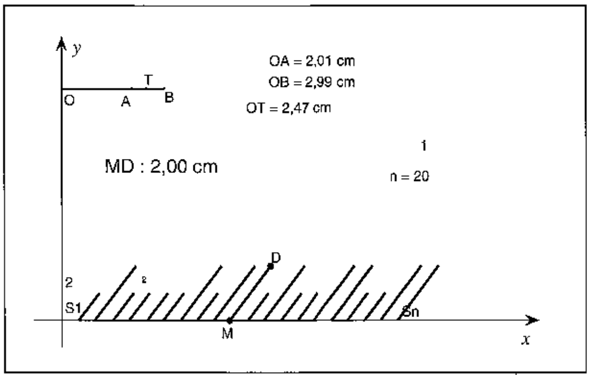
Le professeur qui aurait essayé de poursuivre sa recherche aurait pu prendre conscience combien il est difficile de faire une conjecture et encore plus délicat de la valider…

Le professeur qui aurait essayé de poursuivre sa recherche aurait pu prendre conscience combien il est difficile de faire une conjecture et encore plus délicat de la valider. Actions, rétroactions sont, semble-t-il des activités positives et formatrices pour le développement d'un esprit scientifique, généré par ce type de travail. C'est à partir de là qu'il faudra peut-être mettre au point une évaluation tenant compte des enjeux qui ne sont pas des enjeux de démonstration ou du moins pas dans le sens où on l'entend habituellement en mathématiques.
Une boîte noire qu'il serait pertinent de mener jusqu'à une solution finale validée serait la reconnaissance d'une rotation car cette transformation attaquée de manière inversée peut être résolue avec les outils du début du Lycée.

Cabri pour visualiser des simulations en Statistiques

1 - Un exemple de visualisation de « Pile ou Face »

Sur la figure de droite, M est un point du segment $[S_1\ S_n]$ dont la position génère les nombres 1 ou 2 de façon aléatoire. Pour visualiser le nombre généré.
Ici, $S_1S_n = 19$. De plus, nous avons corrélativement réglé à 20 le nombre de points ou d'objets d'un lieu.
Les segments obtenus constituent le lieu des segments $[MD]$ quand M parcourt $[S_1\ S_n]$ (en réalité, 20 positions équidistantes de ce segment).

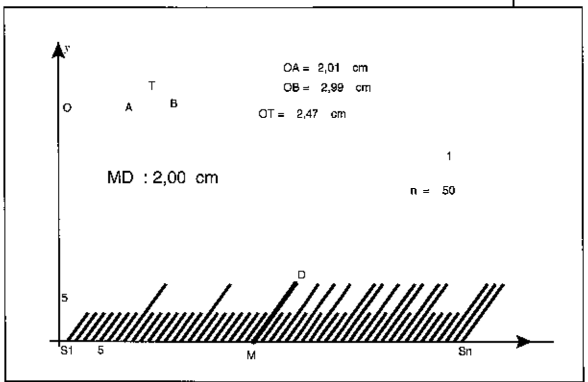


Le peigne obtenu nous donne le résultat d'une simulation de 20 « pile ou face » : chaque dent du peigne ayant une longueur égale à 1 ou 2 suivant le résultat du tirage aléatoire. Il est à noter qu'ici, un léger déplacement de l'origine provoque une nouvelle simulation visualisée par un nouveau peigne.

2 - Modifier les paramètres de la simulation

Ceci est tout à fait possible en modifiant n pour modifier le nombre de lancers à condition de régler le nombre de points ou d'objets d'un lieu à ce nouveau nombre.

Ici, on a choisi $n = 50$. La visualisation du nouveau peigne a été instantanée après modification des paramètres.

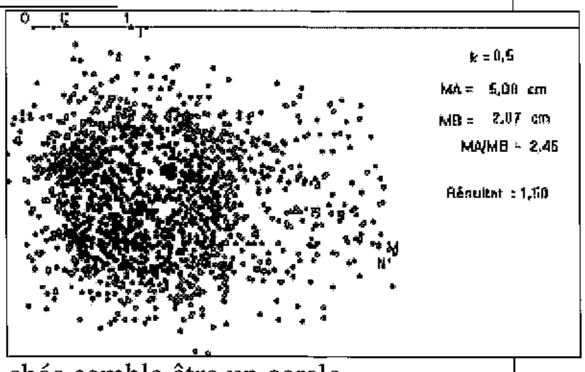


3 - Enregistrer des séries de résultats dans un tableur

Ceci est tout à fait possible et est d'ailleurs abordé dans un chapitre de la brochure IREM à l'occasion de l'estimation de π par bombardement aléatoire d'un carré. On y montre comment on peut transférer sous Excel des données captées dans le tableur de Cabri.

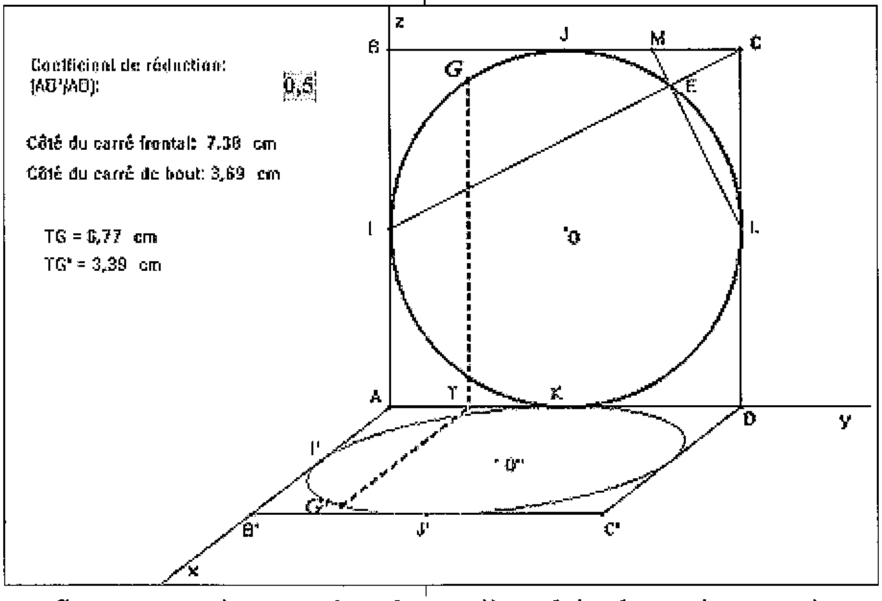
Cabri pour visualiser des lignes de niveau

Dans le fichier figure de droite, quand on déplace le point M, il laisse une trace bleue si MA/MB est inférieur à 0,5 et une trace verte dans le cas contraire.
On se saisit donc du point M avec la souris et on lui fait balayer l'écran dans tous les sens pour voir apparaître le nuage bicolore qui nous permet de conjecturer que la ligne de niveau cherchée semble être un cercle.



On imagine aisément la puissance de conjecture d'un tel fichier qui permet de trouver des réponses à toutes les questions classiques que l'on peut explorer.

Cabri pour visualiser l'espace en perspective cavalière



Dans cette figure, on voit apparaître de manière claire les trois paramètres de la perspective cavalière :

- **le plan frontal avec son repère ;**
- **la fuyante *Ax***
- **le coefficient dit « de réduction ».**

Ces données permettent de construire le rabattu d'un cercle du plan frontal (donc vu en vraie grandeur) sur le plan horizontal en tournant autour de [*Ay*).
On construit le rabattu *G'* d'un point *G* et on demande le lieu du point *G'* quand *G* parcourt le cercle frontal pour obtenir l'ellipse horizontale.

PROFS DE MATHS, PROFS DE FRANÇAIS : MÊME COMBAT

ANNICK LORANT-JOLLY (PRÉSIDENTE DE L'AFEF)
MARC ROUX (PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES EN LYCÉE)

1. Historique

Le groupe de travail maths/français est né à la suite de l'intervention de membres de l'AFEF lors du séminaire de l'APMEP en mai 1999. Il est actuellement formé de 10 membres de l'APMEP et 5 membres de l'AFEF, et reste ouvert aux membres de l'une ou l'autre association qui souhaiteraient nous rejoindre*.

Dès sa création nous nous sommes rendu compte que notre démarche n'avait rien d'original ni de nouveau, car les documents sur le thème du rapprochement de nos deux disciplines sont fort nombreux. L'une de nos tâches sera de les recenser (voir bibliographie en annexe).

2. Les constats

Le point de départ d'un désir de collaboration entre "matheux" et "littéraires", rapprochement que d'aucuns estimeraient contre-nature, est à chercher dans l'idée que nos deux enseignements ont au moins deux objectifs communs : **apprendre à nos élèves à penser, et à exprimer leur pensée par le biais de productions langagières orales et écrites**. Nous avons ainsi l'ambition de contrecarrer la dérive utilitariste et techniciste actuelle : il suffirait, par rapport à la commande sociale (trouver du travail...), en mathématiques, de savoir compter et calculer, et en français, de savoir rédiger sans trop de fautes une lettre de motivation et un C.V.

Penser et s'exprimer sont deux actions étroitement intriquées, mais néanmoins distinctes: si la question de l'existence de la pensée sans mot reste ouverte, il est incontestable qu'en mathématiques, certains élèves parviennent à un résultat exact sans pouvoir transcrire le cheminement de leur pensée.

Les mathématiques **s'enseignent en français**, les solutions de problèmes **se rédigent en français**. Certains ont rêvé, dans les années 70, à des mathématiques réduites à des assemblages de symboles fonctionnant selon des règles rigides; cette utopie est totalement abandonnée actuellement, au moins au niveau des enseignements secondaires (par "retour de balancier" ont disparu aussi certains des symboles les plus élémentaires: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$,..., et leur absence contraint parfois à de pénibles périphrases). Les mathématiques sont des **manipulations d'idées** (de différents niveaux d'abstraction) ; ces idées s'expriment par des phrases cohérentes, en français.

Cependant le "**français des maths**" n'est pas le "français de tous les jours" (qui n'est lui-même pas le "français de la littérature") ; on peut considérer que les textes mathématiques sont constitutifs d'un **registre de langage** (ou de plusieurs, car le cours de 6ème et la thèse de doctorat ne sont peut-être pas à classer ensemble). Si l'enseignant de français peut favoriser la prise de conscience de l'existence des différents registres

(*) Depuis que ce compte rendu a été rédigé, le groupe maths-français a poursuivi ses activités, puis a décidé d'y mettre un terme en souhaitant une relève.

AFEF
Association
Française des
Professeurs de
Français

Borne je suis,
Borne je reste,
Borne, je marque les limites du champ
Borne, sur moi, l'oiseau lance son chant...

de langue (oral "copains", oral familial, écrit administratif, écrits scolaires...), alors l'enseignement des mathématiques est facilité.

Citons quelques **caractéristiques du "français des maths"** :

- *prédominance de la conjugaison au présent* (les vérités mathématiques sont intemporelles, et n'ont donc pas à être exprimées au passé ni au futur)
- *effort pour tendre vers la biunivocité* (un concept ↔ un mot), jamais totalement atteinte
- *refus de la redondance* : une démonstration bien faite apporte la certitude absolue de sa conclusion ; des arguments supplémentaires en faveur de cette conclusion sont perçus comme totalement superflus, donc néfastes car ils compliquent, rallongent et obscurcissent le discours. Un exemple : dans le sujet du bac S 2000, il était demandé de démontrer qu'un certain triangle était équilatéral ; certains candidats ont d'abord prouvé que les trois côtés avaient la même longueur (ce qui suffisait), et ont en plus montré que les angles avaient pour mesure 60°. Bien que ceci n'ait pas été sanctionné par le barème officiel, tout prof de maths estimera que "c'est moins bon" que la copie où on s'est borné à l'égalité des longueurs. Cette façon de faire sera sans doute mieux intégrée par l'élève si le prof de maths et le prof de français soulignent de façon concertée que la démonstration diffère fondamentalement de l'**argumentation**, dans laquelle aucun argument n'est décisif à lui seul, mais où c'est leur accumulation qui emporte l'adhésion de l'interlocuteur.
- *absence de phrases sans verbe* (par exemple, jamais de phrase exclamative comme "oh la belle courbe!"; pourtant les mathématiques recèlent bien des beautés aptes à provoquer l'enthousiasme). Ceci pose d'ailleurs problème car le verbe est souvent "caché" dans l'un des symboles dont l'usage est resté courant : =, <, >,...
- *spécificité de la signification de certains termes* :
  - parfois un mot a, en maths, l'une de ses significations multiples du langage courant :
    exemples : droit ; borne ; minimum ; limite...
  - parfois (plus souvent) il a un sens différent (avec en général un lien plus ou moins lointain avec la signification courante ; exemples : dérivée, intégrale, hypothèse...
- *encore deux remarques concernant le vocabulaire proprement mathématique* :
  - dans l'enseignement secondaire, il se réduit progressivement, à chaque changement de programme : ainsi en seconde ont disparu récemment "isométrie", "homothétie",..., plus anciennement "bijection"...
  - sa frontière est floue. Par exemple : les mots suivants appartiennent-ils, selon vous, au langage mathématique ou au langage courant ? *isocèle, parallèle, parallélépipède, sécant, tangent, perpendiculaire, translation, rotation, angle, inclusion, fonction, fraction, équation, quotient, théorème, irrationnel, récurrence...* Comparez vos réponses avec celles obtenues auprès d'enseignants de français, en juillet 2000, lors d'un atelier dans le cadre du congrès de la FIPF (voir annexe 4).

Réciproquement, les mathématiques peuvent apporter une aide à l'enseignement littéraire car elles ont vocation à :

- *ancrer en profondeur l'habitude de justifier* (démontrer, prouver...) toute affirmation (ou alors, on en assume la subjectivité : "pour moi,....,je suis persuadé que..." ; en maths, il s'agit alors d'une conjecture, que l'on s'efforce ensuite de démontrer) ;

- *créer l'exigence de ces mêmes justifications dans les textes lus* : base essentielle de l'analyse critique et de l'aptitude à résister aux manipulations mentales ;
- *faire réfléchir sur la polysémie* de ces petits mots si importants que sont les connecteurs logiques comme "donc, car, or, si...alors, et, ou, non, au moins,..." en comparant leur usage dans des énoncés mathématiques et dans d'autres types de textes, littéraires ou journalistiques.*

3. Les objectifs

On l'aura compris, nous prônons la collaboration étroite entre les enseignants de mathématiques et de francais (ceci concerne essentiellement les niveaux collège et lycée, puisque en primaire, c'est une seule et même personne ; dans l'enseignement supérieur, la spécialisation est trop grande, et l'une des deux matières est généralement absente). Les effets positifs sur les élèves devraient en être :

- éviter le "saucissonnage" des connaissances, perrnettre le transfert de celles-ci d'un cours à l'autre, tout en insistant sur la spécificité de chaque logique disciplinaire, et introduire ainsi pour les élèves une cohérence dans l'ensemble de leur formation. C'est le but principal de toute expérience interdisciplinaire ;
- comprendre l'intérêt de la qualité de l'expression pour construire sa pensée ;
- éviter les blocages, les attitudes de refus d'une discipline ou d'un groupe de disciplines : combien de fois avons-nous entendu des littéraires (connus ou non, talentueux ou non) s'enorgueillir d'avoir été "nuls en maths" ?

4. Les moyens

Parvenir à ces objectifs suppose d'abord des **rencontres** : d'où la création du groupe; lors de chacune de nos réunions, des échanges oraux, souvent passionnés, portent aussi bien sur les plans pratiques que théoriques, renforcent notre désir de travail commun et nous font avancer vers des réalisations concrètes.

Autre moyen **incontournable** : la lecture de la littérature sur ce sujet (abondante, comme dit plus haut) ; pour en faciliter l'accès aux collègues, nous avons entrepris la rédaction de fichesbibliographiques.

On peut d'ailleurs y relever une montée en puissance des activités de production écrite, comme dans la pratique de la **narration de recherche** (voir plus bas). On peut aussi souligner la prise en compte dans le cours des représentations des élèves sur les notions abordées dans nos disciplines. Il s'agit de les faire émerger pour mieux les faire évoluer. On s'est aperçu, en effet, que celles-ci pouvaient constituer un obstacle majeur aux apprentissages, grâce aux travaux des didacticiens en sciences expérimentales.

Mais l'aboutissement logique de ce travail préparatoire est la mise en œuvre d'activités en classe par les deux enseignants conjointement.

Les **cadres** possibles pour ces activités sont multiples : travaux croisés ou ateliers lecture en collège, modules, aide individualisée en 2^nde^, mais aussi les TPE : on a cru, un temps, que le couplage maths/français y était interdit puisque ces disciplines ne sont classées ensemble "dominantes" dans aucune série; mais dans la brochure de la DESCO adressée aux lycées en juin 2000, il est écrit : "*...les associations disciplinaires peuvent varier à l'inté-*

(*) ***Voir à ce sujet :***
Rémy DUVERT :
Langage et raisonnement.
IREM de Picardie, 1996.

(*) **Petit test de logique :**
Annexe 1 - page 45-46

(**) **Exploitation statistique :**
Annexe 2 page 46

Rémi DUVERT et Jean-Michel ZAKHARTCHOUK
52 outils pour un travail commun au collège
CRDP d'Amiens, 1999.

Jean-Pierre RICHETON :
Séances d'aide individualisée « français-mathématiques » au lycée Jean Monnet de Strasbourg.
Bulletin APMEP n° 431 - page 728.

rieur d'une classe ou au sein d'une même série, afin d'associer à la démarche toutes les disciplines qui le souhaiteraient"; d'autre part, des "bruits de couloir" évoquent la possibilité du rétablissement d'une filière lettres/maths (ancienneA_1), où nos deux disciplines seraient tout naturellement dominantes. D'ailleurs certains des thèmes actuellement retenus pour les TPE évoquent des points de rencontre entre mathématiques et littérature : ainsi en S "*temps, rythmes et périodes*" renvoie aussi bien à la versification et la prosodie qu'aux fonctions périodiques ; en L, le thème "*frontière*" pourrait être l'occasion d'une initiation à la topologie...

5. Les difficultés

Il ne faut pas nier l'existence d'obstacles à ces activités. Outre les évidents problèmes d'emploi du temps et de salles, le plus grand est le manque de motivation de l'un des professeurs de maths et français d'une même classe. Ce qui explique qu'aucun membre du groupe n'a réellement pratiqué d'activité commune en 1999/2000 : certains l'avaient fait antérieurement ; les comptes rendus d'expérience ne manquent pas (Cf. bibliographie) ; parfois le prof de maths s'est essayé à "faire de l'interdisciplinarité tout seul" : ainsi une séance d'A.I. en 2^nde^ sur les fautes de français relevées dans un contrôle récent (la plus fréquente étant : "l'ensemble des nombres...sont...") n'a pas été inutile, mais aurait pu être plus profitable si les deux professeurs avaient été présents ensemble pour la correction.

6. Exemples d'expériences

a) "**Petit test de logique**": (*). Il s'agit ici de vérifier la compréhension des expressions "si... alors...", "nécessaire", "suffisant", "réciproque". La partie A est extraite de "*Langage et raisonnement*", par Rémi Duvert. Les mêmes questions ont été posées à des élèves de collège, de 2$^{\text{nde}}$ et de T$^{\text{ale}}$ S. Le principe est de détecter les erreurs, les faire apparaître au grand jour pour mieux les corriger. A remarquer : l'alternance systématique d'exemples mathématiques et d'exemples tirés de la vie courante. La phase importante pour les élèves est la remédiation ; pour le professeur, l'exploitation statistique des résultats (**) est également utile : prévoir les erreurs fréquentes à un niveau donné, détecter les élèves posant des problèmes particuliers, vérifier l'efficacité de son enseignement...

De nombreux exemples d'activités du même type sont fournis dans "*langage et raisonnement*" de R. Duvert, dans "*52 outils pour un travail commun au collège*" par R. DUVERT et Jean-Michel ZAKHARTCHOUK, et bien d'autres brochures éditées par les IREM, les CDDP....

b) Jean-Pierre RICHETON, collègue de maths à Strasbourg (et ancien président de l'APMEP) a réalisé cinq séances d'aide individualisée en commun avec sa collègue de français enseignant dans la même classe de 2$^{\text{nde}}$ "faible" ; voir le compte rendu dans le Bulletin Vert n°431.

c) Une démarche particulièrement intéressante est la **narration de recherche** : mise au point par l'IREM de Montpellier, pratiquée par de nombreux profs de maths de collège, cette technique consiste à faire raconter par l'élève (par écrit) les différents moments de sa recherche d'un problème: tentatives, échecs, changements de tactique... (Cf. bibliographie).

d) En octobre 2000, Marc ROUX a réalisé avec Véronique LICOUR, qui enseigne le français dans la même seconde, trois séances d'aide individualisée sur le thème "traduction d'un texte en formules, schémas, figures, etc, et traduction en sens inverse" ; étaient présents 7 élèves repérés, dans l'évaluation de début de 2nde en maths et/ou en français, pour une certaine insuffisance en ce domaine, et une élève volontaire. Dans les deux premières heures (1 h A.I. de maths, 1 h A.I. de français) les élèves ont travaillé individuellement sur la feuille d'exercices distribuée (Cf. annexe 5); leurs productions ont été examinées par les deux enseignants ; ceux-ci, présents en-semble à l'heure suivante d'A.I. de francais, en ont fait le commentaire oral et ont ouvert avec les élèves un dialogue sur l'expression en général. Il est encore trop tôt pour évaluer l'impact de ces séances.

Les exemples de telles collaborations entre enseignants de maths et francais sont probablement fort nombreux, et leur fréquence devrait aller croissant ; le groupe de travail maths/francais souhaite en recueillir des récits, comptes rendus et analyses, et pourra diffuser les plus intéressants.

ANNEXE 1
PETIT TEST DE LOGIQUE

Extrait de *Langage et raisonnement. Réflexion et exercices autour de quelques petits mots* Rémi DUVERT IREM de Picardie 1996

A .1 On sait que : « *Si un quadrilatère est un carré, alors il a quatre angles droits* ».
AEJR, BFKS, CGLT et *DHMU* sont des quadrilatères.

a) *AEJR* est un carré ; est-ce que *AEJR* a quatre angles droits ?

☐ oui ☐ non ☐ c'est possible, mais ce n'est pas sûr

b) *BFKS* n'est pas un carré : est-ce que *BFKS* a quatre angles droits ?

☐ oui ☐ non ☐ c'est possible, mais ce n'est pas sûr

c) *CGLT* a quatre angles droits ; est-ce que *CGLT* est un carré ?

☐ oui ☐ non ☐ c'est possible, mais ce n'est pas sûr

d) *DHMU* n'a pas quatre angles droits ; est-ce que *DHMU* est un carré ?

☐ oui ☐ non ☐ c'est possible, mais ce n'est pas sûr

2 - Test analogue à partir de la phrase : « *si une voiture est bleue, alors ses sièges sont gris* »

B - Compléter chacune des phrases suivantes par l'une des expressions suivantes : «*il faut* », « *il suffit* », « *il faut et il suffit* », « *nécessaire* », « *suffisante* », « *nécessaire et suffisante* » :

a) Pour avoir le droit de conduire une voiture .... avoir au moins 18 ans.

b) Pour que x soit supérieur à 4, ... que x soit supérieur à 3.

c) Pour avoir le droit de vote, ... avoir 18 ans et être inscrit sur les listes électorales.

d) Pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A, ... que $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

e) Avoir 18 ans est une condition .... pour conduire une voiture.

f) $x > 2$ est une condition .... pour que $3x > 6$.

g) Avoir 14 dans toutes les matières est une condition .... pour passer dans la classe supérieure.

h) *MA* = *MB* est une condition .... pour que *M* soit le milieu de [*AB*].

C - Ecrire la ***réciproque*** de chacune des phrases suivantes ; indiquer VRAI ou FAUX pour la phrase donnée et pour sa réciproque.

Exemple : Si $x > 4$ alors $x > 2$: VRAI ; réciproque : si $x > 2$ alors $x > 4$: FAUX.

a) Si j'ai plus de 10 de moyenne aux épreuves du bac, alors je suis reçu(e) : ......

b) Si un triangle est équilatéral, alors il est isocèle : ......

c) Si j'ai plus de 14 de moyenne aux épreuves du bac, alors je suis reçu(e) : ......

d) Tous les carrés sont des rectangles : ......

e) Deux vecteurs opposés sont forcément colinéaires : ......

ANNEXE 2
PETIT TEST DE LOGIQUE - DÉPOUILLEMENT

Données en pourcentages, calculées sur : 29 élèves de 2de (indifférenciée), 35 élèves de Tale S plus, pour l'exercice A seulement, 70 élèves de collège (6ème, 5ème, 4ème, répartition non fournie).

A - « ? » signifie : « c'est possible, mais ce n'est pas sûr ».

	Collège				Seconde				Terminale			
	OUI	NON	?	Rép. exacte	OUI	NON	?	Rép. exacte	OUI	NON	?	Rép. exacte
1.a)	99	1	0	99	100	0	0	100	100	0	0	100
b)	14	16	70	70	0	21	79	79	0	6	94	94
c)	29	11	60	60	10	0	90	90	9	0	91	91
d)	2	89	9	89	0	97	3	97	0	97	3	97

B -

	Seconde				Terminale			
v	Il faut ou c. nécess.	Il suffit ou c. suffis.	Il faut et il suffit ou CNS.	Réponses correctes	Il faut ou c. nécess.	Il suffit ou c. suffis.	Il faut et il suffit ou CNS.	Réponses correctes
a)	86	3	7	86	94	0	3	94
b)	62	21	17	62	74	20	3	74
c)	24	26	48	48	17	6	74	74
d)	34	21	34	34	9	29	60	60
e)	66	3	24	66	86	0	14	86
f)	34	45	17	17	17	31	46	46
g)	3	69	21	69	9	86	3	86
h)	55	10	31	55	40	14	43	40

C -

	Seconde							Terminale						
	Phrase donnée			Enoncé réciproque correct	Réciproque			Phrase donnée			Enoncé réciproque correct	Réciproque		
	V	F	Rép. exacte		V	F	Rép. exacte	V	F	Rép. exacte		V	F	Rép. exacte
a)	100	0	100	69	66	31	66	100	0	100	91	83	17	83
b)	90	7	90	90	3	93	93	94	6	94	100	0	100	100
c)	90	0	90	90	3	79	79	100	0	100	83	0	100	100
d)	90	0	90	90	3	86	86	94	6	94	100	0	100	100
e)	66	31	66	90	17	76	76	100	0	100	100	0	100	100

COMMENTAIRES

1. Globalement les pourcentages de réponses correctes s'accroissent avec le niveau scolaire, ce qui n'est pas inattendu, mais a quelque chose de rassurant.

2 - Les erreurs nombreuses, dans B, sont surtout des erreurs par omission : les conditions nécessaires **et** suffisantes sont répertoriées comme nécessaires par les uns, suffisantes par d'autres. Ce fait peut s'interpréter comme une paresse à aller au fond des choses, une tendance à se contenter d'une réponse partielle.

3 - L'exercice A, et dans une certaine mesure l'exercice C, indiquent que, à chacun des trois niveaux testés, on fait plus de fautes de raisonnement dans une situation « concrète » qu'à l'intérieur des mathématiques. Un pessimiste en déduirait que l'enseignement des mathématiques échoue dans sa dimension d'apprentissage de la pensée logique ; mais il y a lieu de remarquer que les performances dans le domaine concret s'améliorent avec le temps, parallèlement à celles du domaine mathématique bien qu'avec un certain retard sur celles-ci : on peut donc penser que l'efficacité de notre enseignement est réelle, mais que le « rendement n'est pas de 100% », que les frontières interdisciplinaires ; d'où la nécessité de réflexions et d'actions transversales.

ANNEXE 3
BIBLIOGRAPHIE

Tout, ou presque, ce qui a été publié sur le thème maths/français avant 1992 est recensé (avec résumés et commentaires) dans

• "*Français et mathématiques - Lecture/écriture - Démonstration/argumentation - Orientation bibliographiques*" par le **Groupe "Langage et mathématiques"** coordonné par Colette LABORDE et Roberte TOMASSONE. CRDP de Marseille - 1992

Un choix arbitraire et subjectif de quelques autres publications :

• Rémi DUVERT : *Langage et raisonnement. Réflexions et exercices autour de quelques petits mots* IREM de Picardie - 1996.

• Rémi DUVERT & Jean-Michel ZAKHARTCHOUK : *52 outils pour un travail commun au collège.* CRDP d'Amiens - 1999.

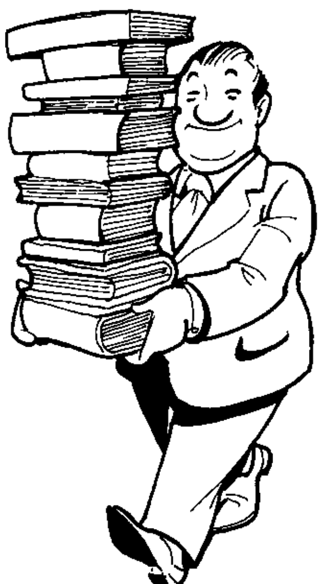
• Rémi Duvert : *Maths et littérature* - Article dans le Bulletin de l'APMEP n° 425 - 1999.

• Denise Haugazeau : *Démonstration et argumentation* - Article dans le Bulletin de l'APMEP n° 421 - 1999.

• A. CHEVALIER & M. SAUTER : *Narration de recherche.* IREM de Montpellier - 1992

• Groupes académiques (Lyon) : *Maîtrise des langages et apprentissages disciplinaires au collège.* Académie de Lyon - 1999

• Viviane DE LANDSHEERE : *L'éducation et la formation* - PUF - Paris - 1992



ANNEXE 4

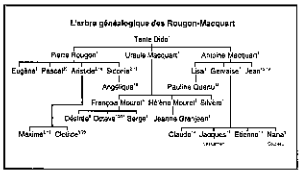
Enquête sur 17 mots : langage mathématique ou langage courant ?

	LANGAGE MATHÉMATIQUE	LANGAGE COURANT
isocèle	X	
parallèle		X
parallèlépipède	X	
sécant		X
tangent		X
perpendiculaire		X
translation		X
rotation		X
angle		X
inclusion		X
fonction		X
fraction		X
équation	X	
quotient	X	
théorème	X	
irrationnel		X
récurrence		X

ANNEXE 5
AIDE INDIVIDUALISÉE MATHS/FRANÇAIS (X-2000)

Première partie : compréhension de consignes, traduction de texte par des symboles, schémas, etc.

1 - Traduire la phrase suivante par une égalité :
« Le nombre A est la somme du triple du nombre x avec la moitié de x »



2 - Traduire les phrases suivantes en arbre généalogique :

a) Au début de 1851, Gervaise, fille du contrebandier Macquart et d'une marchande de La Halle, est montée de Plassans à Paris suivre son amant Auguste Lantier dont elle a eu deux fils, Claude et Etienne.

b) Lantier finit par l'abandonner. La jeune femme se laisse courtiser par un ouvrier zingueur, Coupeau, dit Cadet-Cassis.

c) Gervaise et Coupeau se marient. Installés rue Neuve-de-la-Goutte-d'or, ils ont une petite fille, Nana.

3 - Construire une figure conforme aux données suivantes :
ABC est un triangle isocèle, $AB = AC = 2BC$; ABE est un triangle équilatéral extérieur au triangle ABC ; ACF est un triangle rectangle en C, extérieur au triangle ABC, $CF = BC$.

4 - Le texte descriptif ci-dessous se rapporte à un, et un seul, des six dessins ; trouver lequel et expliquer pourquoi.

" *Il sont trois, de sexe incertain car tous en pantalons ; probablement plutôt jeunes. Celui de gauche fume une cigarette, appuyé à un mur de brique. Dans ce mur s'ouvrent deux fenêtres, et il porte des affiches en caractères chinois. Les deux autres personnages sont assis sur le trottoir qui borde le mur ; l'un porte des lunettes et sur ses genoux un vêtement est étendu. Tous trois ont l'air triste, ou fatigué, ou les deux.* "

Ici étaient fournis aux élèves six dessins très peu différents, numérotés ; l'un (n°6) correspondait scrupuleusement à la description ; les autres étaient des reproductions légèrement modifiées. n° 1 : le personnage de droite porte une jupe et non un pantalon ; n° 2 : le mur est en pierre et non en brique ; n° 3 : le personnage de gauche fume la pipe et non une cigarette ; n° 4 : le texte des affiches est en français et non en chinois ; n° 5 : tous les personnages portent des lunettes.

Deuxième partie : traduction de symboles, schémas, dessins, etc? par un texte

1 - Traduire par une phrase l'égalité suivante : $S = (x + y)/2x$.

2 - Interpréter l'arbre généalogique (donné) des Rougon-Macquart et mettre en relation avec les romans (liste donnée) et quelques-uns de leurs personnages.

3 - 4 -"Téléphoner" une figure (donnée), une photo, un dessin.