LE NOUVEAU PROGRAMME DE SECONDE AVEC CABRI

JEAN-JACQUES DAHAN

http://www.irem.ups-tlse.fr/Groupes/MathInfo.html

Sur le site internet de l'Irem de Toulouse, cet Atelier est disponible à l'adresse ci-dessus en cliquant sur Atelier Nice.
Une expérimentation ou une validation est disponible en direct pour chaque paragraphe.

* *Enseigner et pratiquer les mathématiques avec Cabri.*
IREM de Toulouse - 2002

A propos de Cabri :
CAhier de
BRouillon
Interactif

Version de démonstration téléchargeable à partir de :
http://www.cabri.net

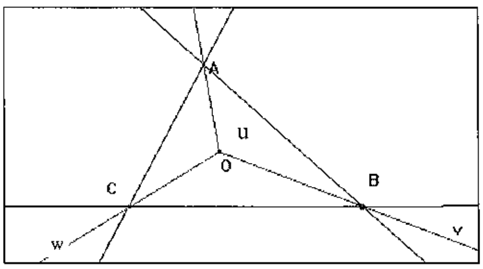
Montrer comment le logiciel de géométrie dynamique peut être utilisé pour enseigner les nouveaux programmes de seconde était l'objectif ambitieux de cet atelier. Le temps qui m'était imparti pour présenter le fruit de mon travail (une brochure de l'IREM de Toulouse alors en cours d'écriture maintenant publiée) m'a obligé à faire un choix que je résume ici.*

Cabri peut être une aide véritable à la résolution de problèmes

Avant d'aborder l'utilisation de Cabri dans nos gestes d'enseignants, il m'a paru pertinent de convaincre mes interlocuteurs enseignants que Cabri était un outil puissant pour résoudre des problèmes de mathématiques et en particulier des problèmes qui soient de vrais problèmes, c'est-à-dire qui nécessitent une vraie recherche où Cabri va jouer, sous notre impulsion, un rôle décisif aussi bien au niveau de l'appropriation du problème qu'à celui des chances de réussite.

1 - Le problème proposé (une construction sous contrainte) :

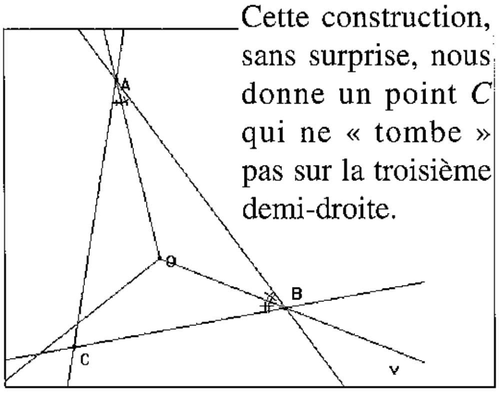
Construire un triangle ABC dont les bissectrices intérieures $[Ou)$, $[Ov)$ et $[Ow)$ sont données.



Ce problème, je me le suis posé à moi-même comme un défi parce que je sentais que l'environnement Cabri allait me permettre de « faire des choses » alors que jamais dans un environnement papier-crayon je ne me serais mis dans une telle situation.

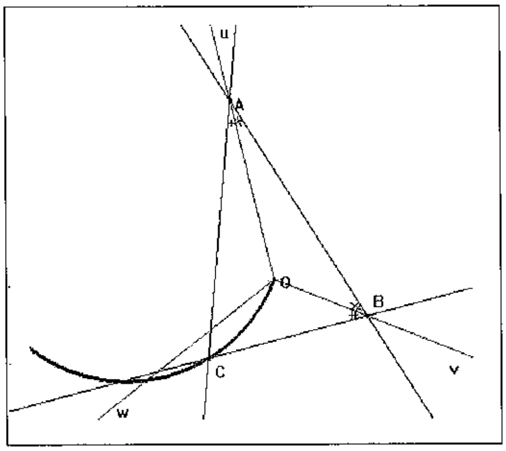
2 - Compte rendu de ma recherche (partie 1)

• ***Analyse :*** A une homothétie près, si solution il y a, elle est unique ; je vais donc choisir arbitrairement un point A sur la demi droite $[Ou)$.
Ne sachant où choisir le point B, je décide de le positionner arbitrairement sur la seconde demi-droite $[Ov)$; je sais qu'éventuellement je pourrais modifier ma position si l'envie me venait et je sais, qu'avec Cabri, cette envie viendra.
Enfin, si A et B étaient les deux premiers sommets d'un triangle-solution, la construction de C s'en suivrait immédiatement : en effet, si $[Ou)$ et $[Ov)$ étaient les deux premières bissectrices intérieures du triangle ABC, C serait à l'intersection des droites symétriques de (AB) respectivement par rapport aux axes portés par ces demi-droites.



Cette construction, sans surprise, nous donne un point C qui ne « tombe » pas sur la troisième demi-droite.

Nous essayons donc de changer B de place sur la demi-droite $[Ov)$. Sur la figure ci-dessous on a laissé les traces des positions intermédiaires de B et de C.



Il semble donc qu'il existe une position de B amenant C sur $[Ow)$.

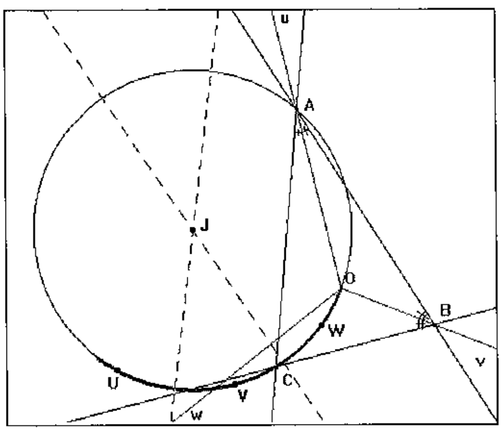
Nous allons examiner de plus près la trace laissée par C en faisant affficher le lieu des points C quand B parcourt la demi-droite $[Ov)$.

Il semblerait que ce lieu soit un arc de cercle ayant O pour l'une de ses deux extrémités.

Pour valider cette conjecture, nous avons construit le cercle passant par trois points quelconques de ce lieu U, V et W.

Ce cercle, centré en J, intersection des médiatrices de $[UV]$ et $[VW]$ semble bien contenir notre lieu et, en plus, il a l'air de passer par A.

Si, dans un second temps, on déforme la figure en faisant tourner la demi-droite $[Ov)$ autour de O, ces observations perdurent et même beaucoup



mieux ; l'animation nous permet de rajouter deux autres conjectures dont une capitale pour la résolution de notre problème : **le point J semble bien être aligné avec O et B.**

La deuxième extrémité de l'arc détecté plus haut semble être le symétrique de A par rapport à J.

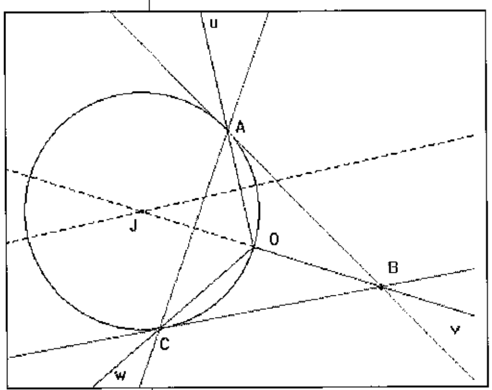
Résultat de l'analyse : A étant donné, si un triangle-solution existe, on doit l'obtenir par la procédure suivante :
On construit le cercle passant par A et O, centré sur le support de $[Ov)$ en un point qu'on nommera J.
L'intersection de ce cercle avec $[Ow)$ donne C.
Le point B est sur le support de la demi-droite $[Ov)$.

Compte rendu de ma recherche (partie 2) :

Synthèse :

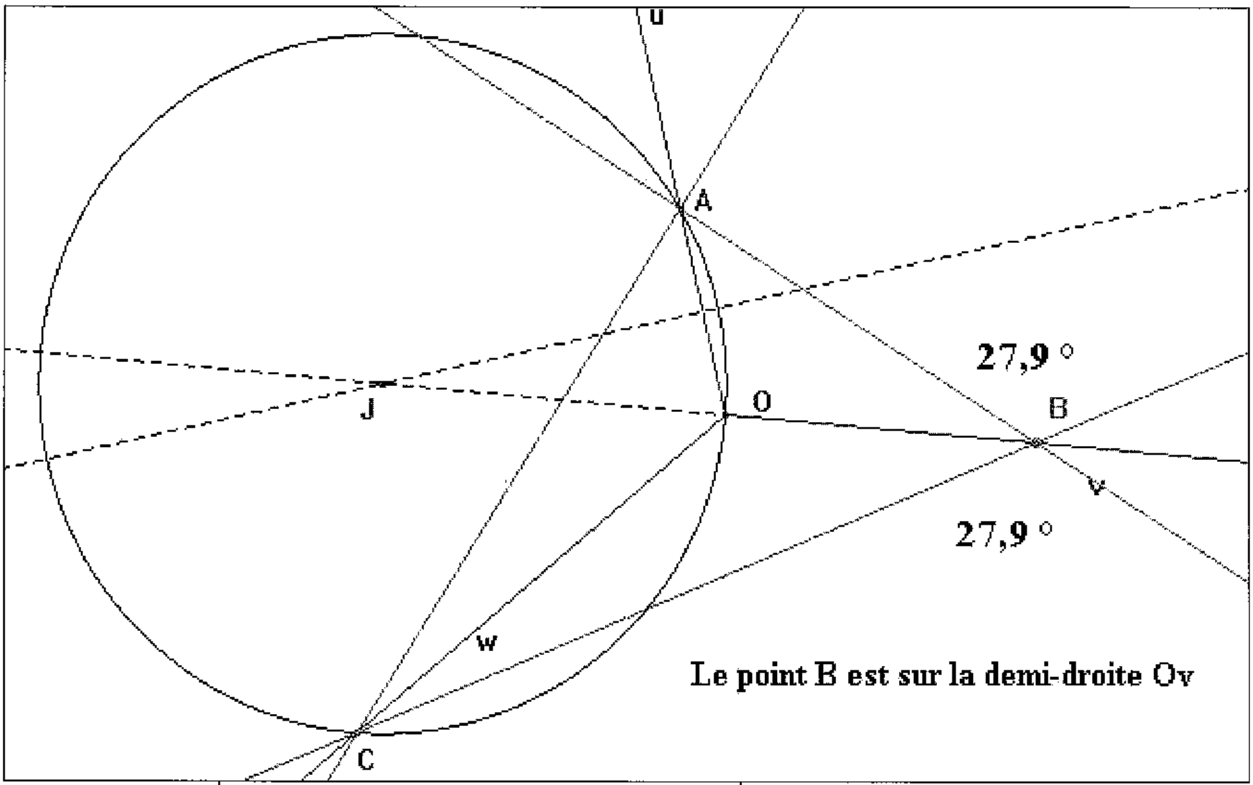
Donnons-nous un point A sur $[Ou)$.

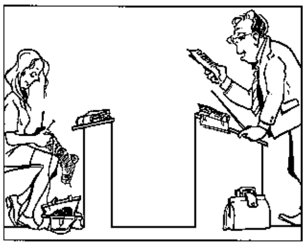
Construisons J intersection de la médiatrice de $[OA]$ et du support de $[Ov)$. Construisons le cercle de centre J et passant par O et A. Ce cercle coupe $[Ow)$ en C. Complétons le triangle par le point B intersection des deux droites respectivement symétriques de (AC) par rapport à $[Ou)$ et $[Ow)$.



Le point B devrait appartenir à la demi-droite $[Ov)$. Demandons-le au logiciel qui répond affirmativement, même si on bouge les paramètres de la figure.

On vérifie aussi, avec le logiciel, que $[Ov)$ est bien la bissectrice de l'angle ABC en affichant les mesures des deux autres angles ABO et ABC qui restent bien les mêmes si nous modifions les positions des points ou droites variables.





Un cours magistral participatif ?

Résultat de la synthèse : Il semblerait que notre problème admette bien une solution qui est celle mise en évidence dans l'analyse et confortée par la synthèse. Même si le pouvoir de conviction de cette démarche est très fort : c'est la démarche expérimentale menée en sciences ; les physiciens tiendraient le résultat pour bon jusqu'à preuve du contraire ; nous, il nous reste l'étape ultime de la validation : la démonstration.

Compte rendu de ma recherche (partie 3) :

Démonstration : Inutile de préciser que j'ai eu très envie de démontrer ce résultat ; j'y ai consacré quelques moments en attaquant le problème sous des angles différents, mais sans succès. J'ai posé ce problème autour de moi sous une forme classique et une de mes collègues, formatrice associée de l'IUFM de Toulouse, Nicole GILABERT, a trouvé une solution élémentaire utilisant les angles inscrits et les triangles semblables. Vous trouverez cette solution dans la brochure dont il a été question plus haut.

Cabri pour introduire la notion de fonction et les notions attachées

Introduire la notion de fonction est un souci de l'enseignant de seconde, que ce soit sous forme d'activité introductive dévolue aux élèves ou sous forme d'exposé magistral participatif. Le problème est le temps, si on fait exception des contraintes techniques : comment gérer son temps dans l'environnement informatique pour rendre pertinente l'utilisation de cet environnement ? Il est important, dans un premier temps, de montrer ce que l'on peut faire d'élémentaire (pour le connaisseur) et de nouveau (pour le néophyte) afin de pouvoir envisager un nouveau type de transposition.

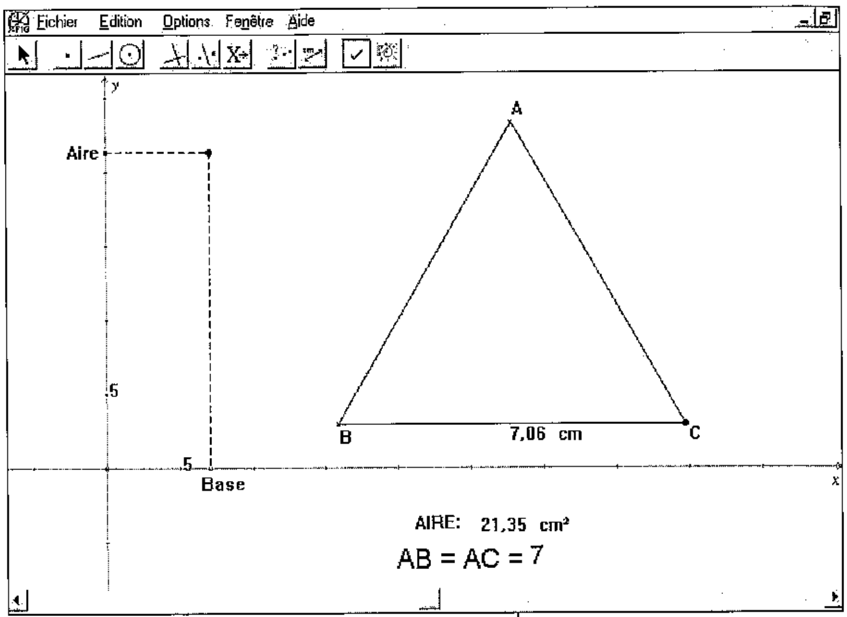
1 - Problème de maximisation d'une aire.

Peut-on construire un triangle *ABC* isocèle en *A*, d'aire maximum ? Si oui, comment ?

2 - Aborder ce problème avec Cabri.

Construction de la figure-fichier :

On construit un triangle isocèle ABC où $AB = AC$ (cette mesure est affichée et peut être modifiée). On s'arrange pour que le triangle soit déformable en tirant sur C : seule la longueur BC est modifiable par cette action.

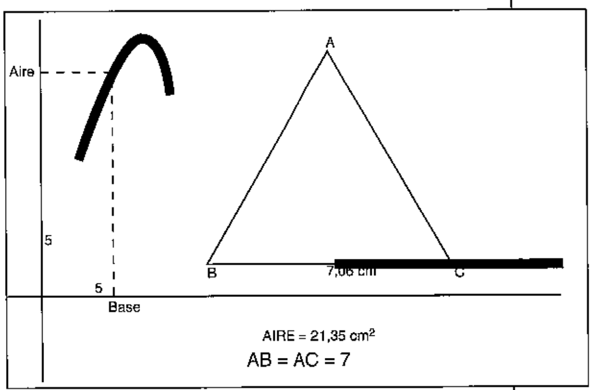


Dans le repère affiché on transfère en abscisse la longueur BC et en ordonnée l'aire du triangle ABC pour construire un point M de la courbe de la fonction donnant l'aire en fonction de la base BC.

Après cette phase de construction, toujours capitale dans Cabri, car les manipulations qui vont être possibles vont dépendre de ces constructions, vient la phase de traitement dynamique.

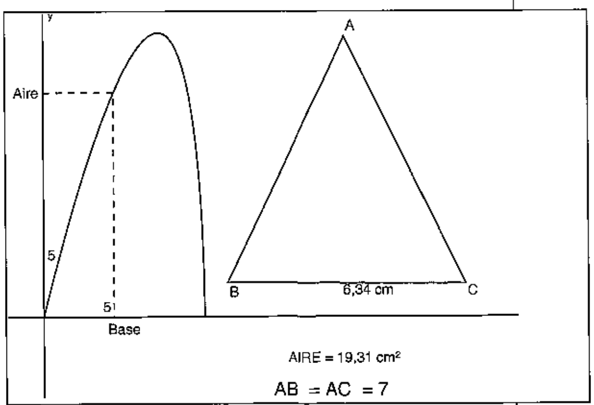
Manipulations (presque tout s'anime) :

Ici, on a tiré sur le point C, ce qui provoque le changement de position du point M de notre courbe qui commence à apparaître car nous avons demandé au logiciel de laisser les traces de ces deux points au cours de leurs déplacements.

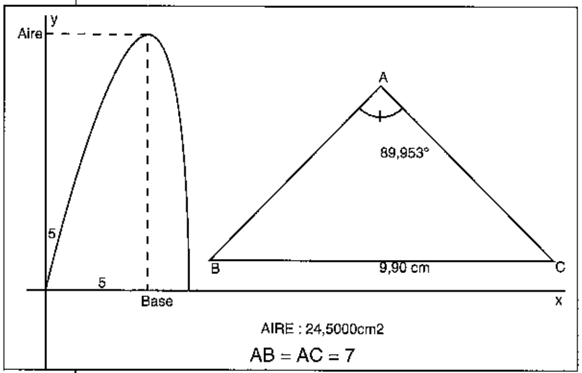


La courbe complète a été obtenue comme le lieu des points M quand C parcourt la demi-droite horizontale sur laquelle il a été créé.

Quand on tire maintenant sur C, on peut visualiser comment l'aire varie en fonction de la base.

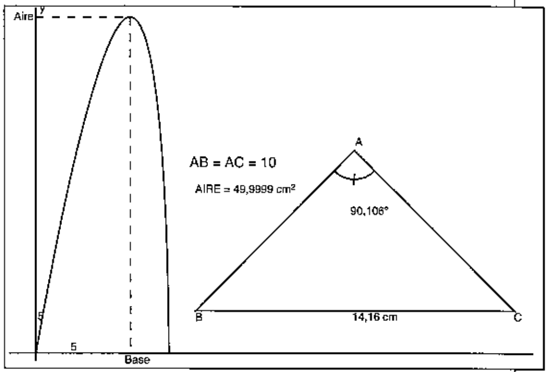


On peut maintenant tirer sur le point C jusqu'à obtenir une aire maximum. Ceci est présenté dans les deux cas de figures mais il est bien entendu que l'on peut modifier la longueur de $[AB]$ autant de fois que l'on veut pour tester toute conjecture qui pourrait nous apparaître.



L'aire maximum est obtenue quand on atteint le sommet de la courbe et l'angle ABC semble droit.

Conjecture : Il semblerait donc que notre triangle ait une aire maximum quand l'angle BAC est droit.



Mêmes observations

Démonstration : Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice (Elle figure dans la brochure IREM citée précédemment).

Demander à des élèves de venir à bout de la construction du triangle animable n'est pas réaliste dans une phase de découverte ou d'initiation de Cabri ; on peut concevoir de la faire réaliser en module. Par contre, la construction du point générique de la courbe, puis l'obtention de cette dernière sous forme de trace ou de lieu me paraît un bon travail sur la notion de fonction ; la répétition de cette construction chaque fois que l'élève rencontre ce type de problème me semble un excellent travail sur le concept de fonction. Enfin, arriver à tout faire concevoir par un élève ou un groupe d'élèves permettra de s'assurer qu'un travail de modélisation et d'abstraction a été mené avec succès. Un long chapitre de la brochure montre d'ailleurs comment on peut tracer des courbes de fonctions définies formellement.

Que peut-il sortir d'une boîte noire ?

***TICE** : Techniques d'**I**nformation et de **C**ommunication dans l'**E**ducation*

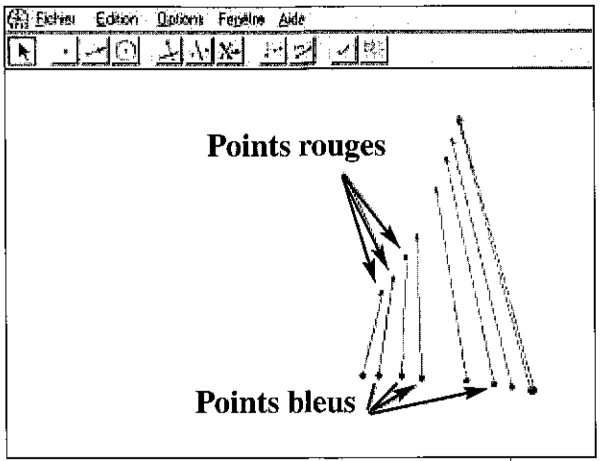
Cabri pour inverser les problèmes avec les boîtes noires

1 - Qu'est-ce qu'une boîte noire ?

Lorsqu'on se donne une transformation connue du plan, on sait quels sont les effets de cette transformation sur droites, cercles, sur le parallélisme, sur l'orthogonalité, sur l'éventuelle conservation des distances ou des angles. Mais si une transformation est donnée de façon inversée, c'est-à-dire par la connaissance de ses effets et que l'objectif fixé est la reconnaissance formelle de cette transformation, on est en face d'un problème spécifiquement TICE, c'est-à-dire réservé au domaine de résolution des Nouvelles Technologies. Ce problème, dont un exemple est donné ci-après se nomme « Boîte Noire » dans tous les cadres possibles et pas seulement dans le cadre géométrique (un exemple est d'ailleurs développé dans ma brochure).

La boîte noire proposée :

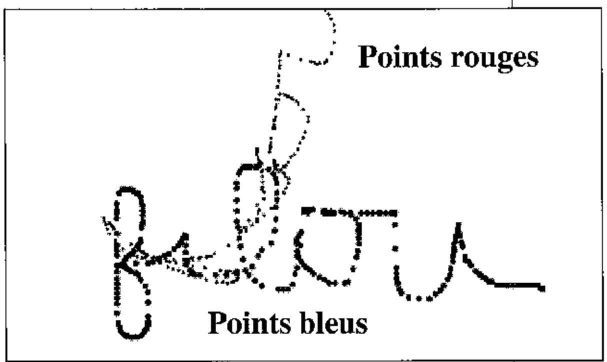
Le point bleu et gras donne le point rouge par une transformation non précisée. On peut tirer sur le point bleu et son image sera réactualisée.



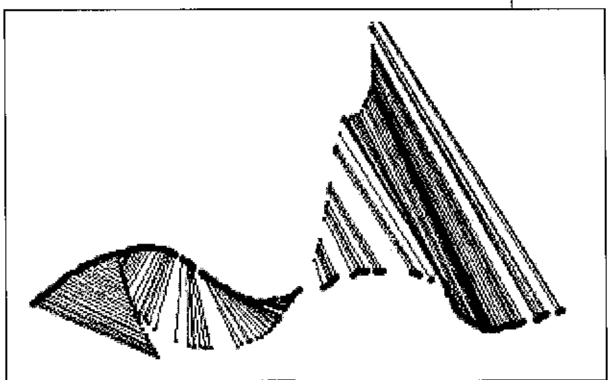
Pour l'instant, il est seulement question de se familiariser avec le travail qu'on est amené à fournir devant une telle tâche afin, dans un second temps, de voir comment on peut utiliser avec les élèves les nouveaux exercices qu'il faudra concevoir à partir de cette nouvelle activité.

Quelques manipulations qui peuvent aider à analyser la transformation donnée :

On a tiré sur le point bleu en écrivant « filou » et on observe ce qu'écrit le point rouge. Cette manipulation permet de se faire une petite idée de la réponse si jamais celle-ci était visuellement et dynamiquement trouvable.

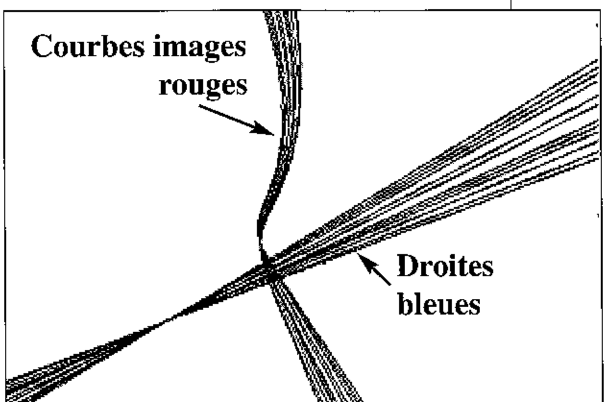


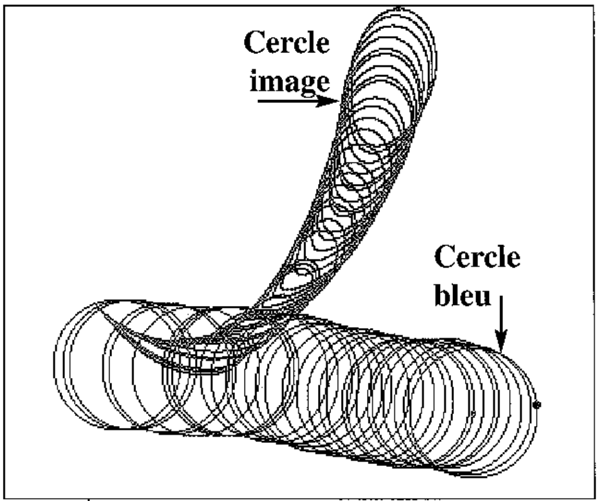
On a refait la même chose ici, mais en faisant décrire au point bleu une courbe qu'on trace à la souris. Comme sur la figure précédente, on a demandé l'activation des points bleus et rouges pour voir leurs traces au cours de leurs mouvements. On a fait de même pour les segments joignant les points à leurs images.



On a mis le point bleu sur une droite bleue et on a demandé le lieu du point rouge quand le point bleu parcourt la droite bleue. Nous avons obtenu en rouge la courbe image de la droite bleue par la transformation cachée.

On a modifié la position de la droite bleue afin de voir comment se modifiait son image.





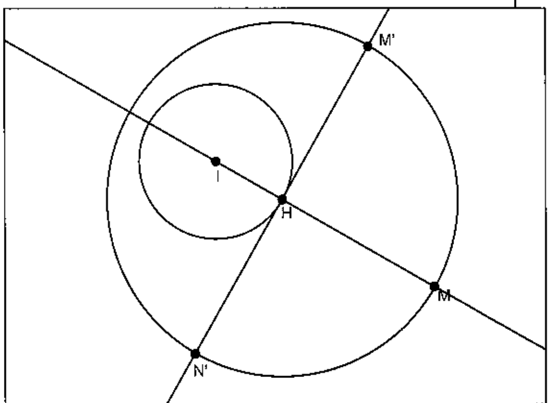
Même procédure que pour l'activité précédente, mais cette fois en mettant le point bleu sur un cercle bleu.
On a ensuite tiré sur le cercle bleu pour voir comment évoluait son image.

Il est évident qu'à ce stade, on se rend compte que la transformation cachée est une transformation non classique qui va être difficile à débusquer bien que la construction géométrique qui m'a permis de la créer soit, on le verra plus loin, simple. J'espère que le professeur arrivera à prendre conscience, dans ce problème, combien il est difficile d'attaquer un problème quand on se sent désarmé, comme peuvent l'être nos élèves devant nos propositions de recherche.
Même pour ce type de travail, il va falloir mettre au point des stratégies, dégager des méthodes pour montrer qu'en réalité nous sommes surarmés, et c'est ce qui fait notre faiblesse.

3 - Solution de cette boîte noire

Tracer un cercle centré en I.
Définir un point libre **M** et le tracer en gras.
Tracer la droite (IM)
- Tracer la perpendiculaire à (IM) passant par H, point d'intersection du cercle et de la droite (IM) avec H entre I et M.

Tracer le cercle de centre H et de rayon HM.
Demander l'intersection de ce dernier cercle avec la perpendiculaire tracée ci-dessus.



Deux points apparaissent : nommez-les respectivement M' et N' sur la figure.

La transformation qu'il fallait trouver est celle qui transforme M en M'.

Le professeur qui aurait essayé de poursuivre sa recherche aurait pu prendre conscience combien il est difficile de faire une conjecture et encore plus délicat de la valider. Actions, rétroactions sont, semble-t-il des activités positives et formatrices pour le développement d'un esprit scientifique, généré par ce type de travail. C'est à partir de là qu'il faudra peut-être mettre au point une évaluation tenant compte des enjeux qui ne sont pas des enjeux de démonstration ou du moins pas dans le sens où on l'entend habituellement en mathématiques.
Une boîte noire qu'il serait pertinent de mener jusqu'à une solution finale validée serait la reconnaissance d'une rotation car cette transformation attaquée de manière inversée peut être résolue avec les outils du début du Lycée.

Le professeur qui aurait essayé de poursuivre sa recherche aurait pu prendre conscience combien il est difficile de faire une conjecture et encore plus délicat de la valider…

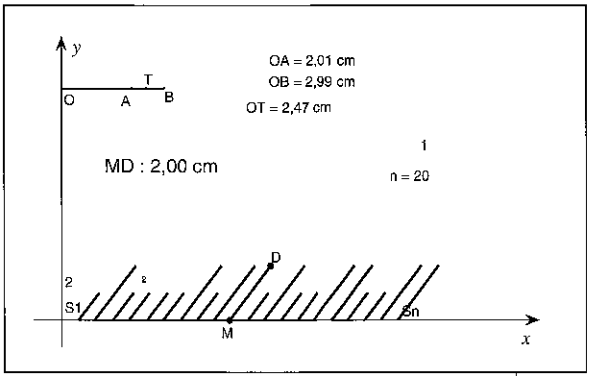
Cabri pour visualiser des simulations en Statistiques

1 - Un exemple de visualisation de « Pile ou Face »

Sur la figure de droite, M est un point du segment $[S_1\ S_n]$ dont la position génère les nombres 1 ou 2 de façon aléatoire. Pour visualiser le nombre généré.

Ici, $S_1S_n = 19$. De plus, nous avons corrélativement réglé à 20 le nombre de points ou d'objets d'un lieu.

Les segments obtenus constituent le lieu des segments $[MD]$ quand M parcourt $[S_1\ S_n]$ (en réalité, 20 positions équidistantes de ce segment).

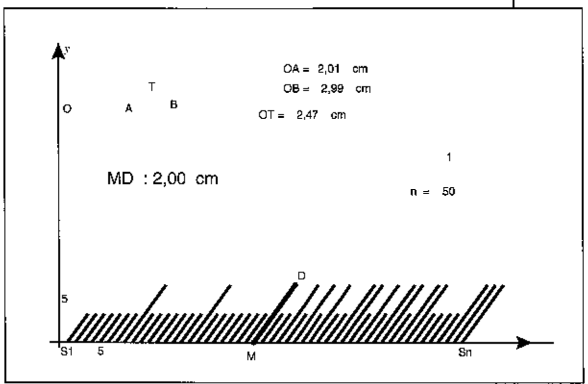


Le peigne obtenu nous donne le résultat d'une simulation de 20 « pile ou face » : chaque dent du peigne ayant une longueur égale à 1 ou 2 suivant le résultat du tirage aléatoire. Il est à noter qu'ici, un léger déplacement de l'origine provoque une nouvelle simulation visualisée par un nouveau peigne.

2 - Modifier les paramètres de la simulation

Ceci est tout à fait possible en modifiant n pour modifier le nombre de lancers à condition de régler le nombre de points ou d'objets d'un lieu à ce nouveau nombre.

Ici, on a choisi $n = 50$. La visualisation du nouveau peigne a été instantanée après modification des paramètres.



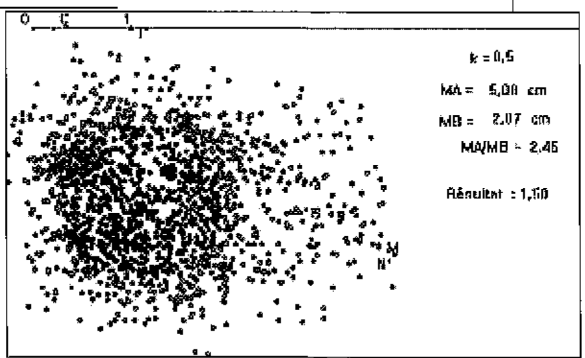
3 - Enregistrer des séries de résultats dans un tableur

Ceci est tout à fait possible et est d'ailleurs abordé dans un chapitre de la brochure IREM à l'occasion de l'estimation de π par bombardement aléatoire d'un carré. On y montre comment on peut transférer sous Excel des données captées dans le tableur de Cabri.

Cabri pour visualiser des lignes de niveau

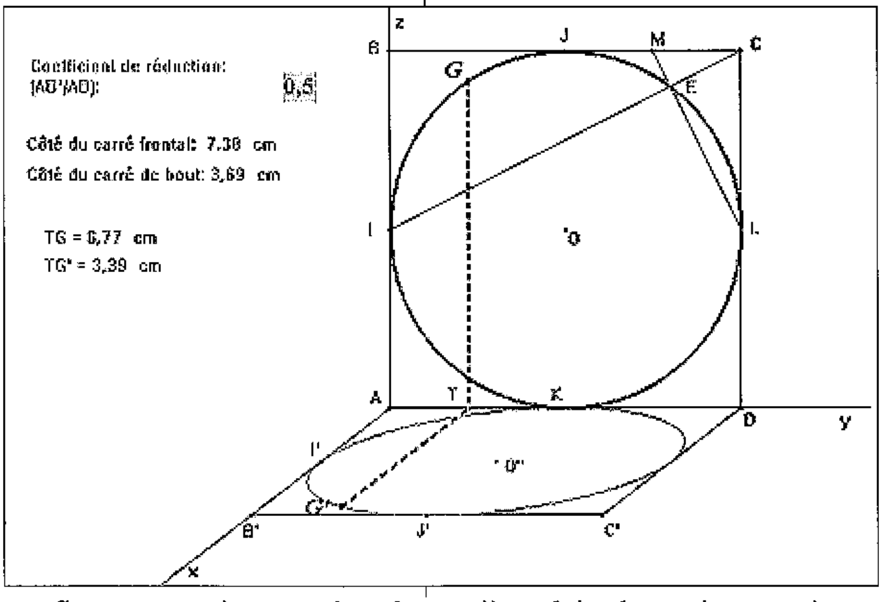
Dans le fichier figure de droite, quand on déplace le point M, il laisse une trace bleue si MA/MB est inférieur à 0,5 et une trace verte dans le cas contraire.

On se saisit donc du point M avec la souris et on lui fait balayer l'écran dans tous les sens pour voir apparaître le nuage bicolore qui nous permet de conjecturer que la ligne de niveau cherchée semble être un cercle.



On imagine aisément la puissance de conjecture d'un tel fichier qui permet de trouver des réponses à toutes les questions classiques que l'on peut explorer.

Cabri pour visualiser l'espace en perspective cavalière



Dans cette figure, on voit apparaître de manière claire les trois paramètres de la perspective cavalière :

- **le plan frontal avec son repère ;**
- **la fuyante** ***Ax***
- **le coefficient dit « de réduction ».**

Ces données permettent de construire le rabattu d'un cercle du plan frontal (donc vu en vraie grandeur) sur le plan horizontal en tournant autour de [*Ay*).

On construit le rabattu *G'* d'un point *G* et on demande le lieu du point *G'* quand *G* parcourt le cercle frontal pour obtenir l'ellipse horizontale.