DES ARBRES DE FRÉQUENCE VERS LES ARBRES DE PROBABILITÉ

J. P. GRANGÉ (BESANÇON)

Description statistique et premiers schémas

Une enquête effectuée auprès des employés d'une entreprise, concernant le sexe et le salaire, a donné les résultats suivants, présentés dans un

a) Tableau de Carroll

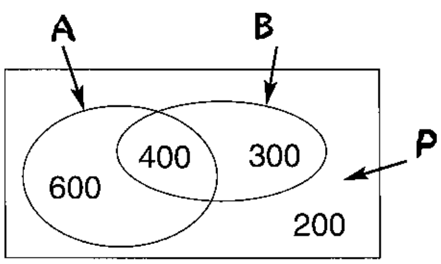
	salaire < 8 000 F	salaire ⩾ 8 000	
femmes	400	300	} **F**
hommes	600	200	
	A		

Notons **P** l'ensemble des employés de l'entreprise, **A** l'ensemble des employés dont le salaire est inférieur à 8 000 F et **F** l'ensemble des employées de sexe féminin.

Ces notations **P**, **A**, **F** représentent des ensembles statistiques et ne doivent pas être confondues avec les notations Ω, A, F, introduites ensuite pour désigner les événements associés dans le modèle probabiliste.

Autres schémas possibles pour traduire ces renseignements :

b) Diagramme de Venn :



c) Tableau de contingence

On peut compléter l'énoncé par un calcul des effectifs marginaux, on obtient un tableau de contingence des effectifs :

sexe \ salaire	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F ^{c}**A**	Total par sexe
femmes **F**	400	300	700
hommes **H**	600	200	800
Total par tranche de salaire	1000	500	1500

où ^{c}**A** désigne le complémentaire de **A** dans la population **P** et on notera dans la suite $\overline{A}$ l'événement contraire de A dans le modèle probabiliste.

d) Tableau de contingence des fréquences

De ce dernier diagramme, on déduit le tableau de contingence des fréquences absolues ou proportions de chaque partie dans la population :

duquel on peut extraire quatre sous-diagrammes donnant les **fréquences relatives :**

sexe \ salaire	< 8000 F **A**	⩾ 8000 F ^{c}**A**	fréquence par sexe
Femme **F**	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$
Homme **H**	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
fréquence par salaire	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés qui gagnent moins de 8 000 F :

salaire / sexe	< 8000 F A
Femme F	$\frac{4}{10}$
Homme H	$\frac{6}{10}$
	1

diagramme de la répartition des sexes parmi les employés gagnant plus de 8 000 F :

salaire / sexe	⩾ 8000 F ${}^cA$
Femme F	$\frac{3}{5}$
Homme H	$\frac{2}{5}$
	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les femmes :

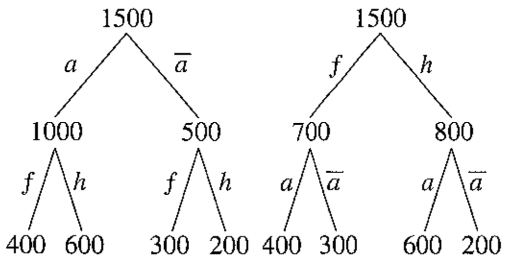
salaire / sexe	< 8000 F A	⩾ 8000 F ${}^cA$	
Femme F	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

diagramme de la répartition des salaires parmi les hommes :

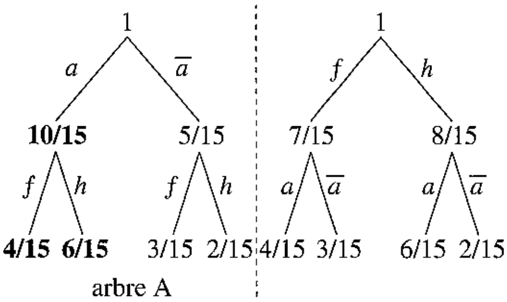
salaire / sexe	< 8000 F A	⩾ 8000 F ${}^cA$	
Homme H	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

PASSAGE AUX ARBRES

Le schéma en arbre nécessite le choix d'un ordre dans la considération des caractères salaire et sexe dont les modalités sont nommées a, $\overline{a}$ et f, h. Il y a donc deux arbres possibles pour les effectifs :



Desquels on déduit les deux arbres des fréquences absolues :



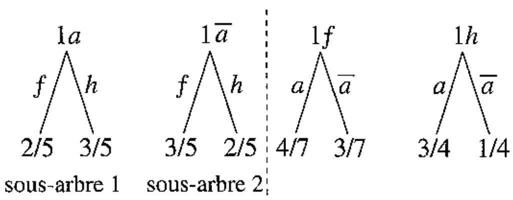
Si la construction de ces arbres paraît naturellement issue des arbres précédents et s'il est vrai que

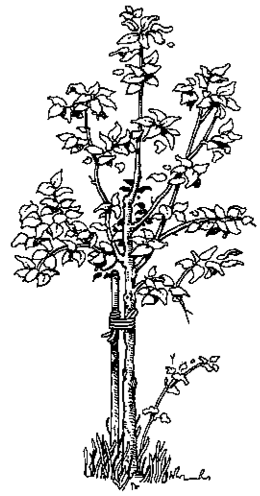
$$4/15 + 6/15 = 10/15$$

et que $3/15 + 2/15 = 5/15$,

cela ne correspond pas à la spécificité de l'arbre. En effet, sur l'arbre A on a plutôt tendance à lire par exemple les 4/15 des 10/15 car dans ce schéma, le caractère f suit le caractère a. Ces arbres de fréquences absolues ne sont jamais utilisés et il serait dangereux de les présenter aux élèves. **Il faut réserver les arbres pour des schémas multiplicatifs et les tableaux pour les schémas additifs.**

On a aussi quatre arbres des fréquences relatives que l'on peut construire ainsi :





Un arbre probabiliste ?

L'idéal serait de remplacer les deux sous-arbres de l'arbre A précédent par les deux sous-arbres 1 et 2 ci-dessus. Il faut alors contourner la difficulté de faire coïncider la fréquence absolue de a, 10/15 avec la fréquence lorsque a sert de référentiel, c'est-à-dire 1. On peut alors échanger sur l'arbre les positions des modalités et de leurs fréquences, on obtient ainsi l'arbre 1 ci-dessous qui est un premier pas vers les arbres probabilistes.

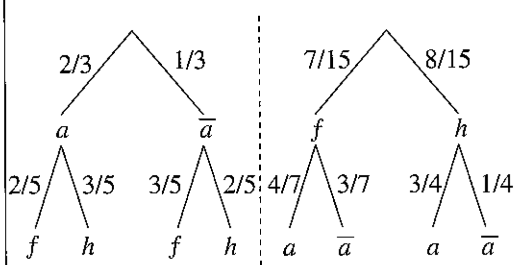
De l'expérience aléatoire vers les arbres probabilistes

On choisit au hasard une personne employée dans cette entreprise et on ne s'intéresse qu'aux caractères statistiques sexe et salaire [1].

Pour mettre en évidence l'avantage de l'arbre par rapport au tableau, changeons l'énoncé en supposant que les quatre renseignements initiaux sur cette entreprise soient les suivants :

2/3 des personnes employées gagnent moins de 8 000 F. Parmi elles 2/5 sont des femmes et parmi celles qui gagnent plus de 8 000 F, 2/5 sont des hommes. 7/15 des personnes employées sont des femmes[2].

Désignons encore par a l'événement « la personne choisie est de caractère a », de même pour $\overline{a}$, f, h. Le déroulement des événements de cette expérience aléatoire peut se représenter par l'arbre 1 suivant :



arbre 1 arbre 2

L'arbre 1 conduit à l'univers :
$\Omega = \{(a,f) ; (a, h) ; (\overline{a} , f) ; (\overline{a} , h)\}$.

Pour nos élèves, on peut justifier l'attribution de probabilités aux événements élémentaires de Ω de la manière suivante :

D'après la conception fréquentiste de la probabilité, si on répète N fois cette expérience à deux épreuves, on peut **espérer**[3] que $\frac{2}{3}$ des N expériences donneront $\boldsymbol{a}$ (une personne qui gagne moins de 8 000 F) puis $\frac{2}{5}$ de ces $\frac{2}{3} \times N$ expériences donneront $\boldsymbol{f}$ (une femme) donc $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ des N expériences donneront $\{a, f\}$. Ce qui conduit à **estimer**[4]

$$P(\{a, f\}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15},$$

si on note P la probabilité définie sur Ω.

Ce raisonnement conduit à cet énoncé : « Sur l'arbre, la probabilité du couple (a, f) s'obtient en multipliant les probabilités successives de a et de f »[5]

D'où la loi de probabilité associée à cette expérience :

Ω	(a, f)	(a, h)	$(\overline{a}, f)$	$(\overline{a}, h)$
$P(\{\Omega\})$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Ce raisonnement précédent se généralise à une expérience comportant n épreuves aléatoires et conduit à cette "règle d'arbres" :

« Sur un arbre, la probabilité d'un *n*-uplet s'obtient en multipliant les probabilités successivement rencontrées ».

Les deux arbres précédents sont des schémas d'aide à la compréhension et à la décomposition de l'énoncé pour un traitement adapté aux probabilités. Ils nous ont également servi à suivre le raisonnement précédent qui nous a conduit à une première règle. Mais ils

NOTES

1 Une situation statistique donne lieu à une situation probabiliste en introduisant l'expérience standard : « prélèvement au hasard d'un élément de la population P.

8 000 F = 1219,59 euros

2 Ce dernier renseignement est inutile pour construire l'arbre 1, mais indispensable pour l'arbre 2, comme on va le voir dans les exercices qui vont suivre. On peut déjà remarquer que, pour construire un arbre, on peut ignorer les effectifs ; seules les fréquences ou les proportions sont indispensables

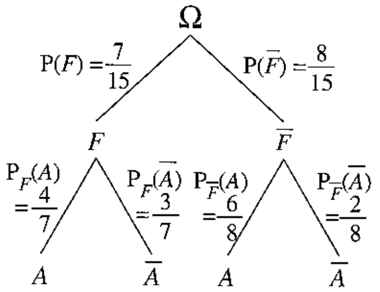
3 $\frac{2}{3} \times N$ est **l'espérance mathématique** de la variable aléatoire binomiale du nombre de réalisations de $\{a\}$ lorsqu'on répète N fois cette expérience.

4 C'est le meilleur **estimateur** d'après la théorie statistique de l'Estimation.

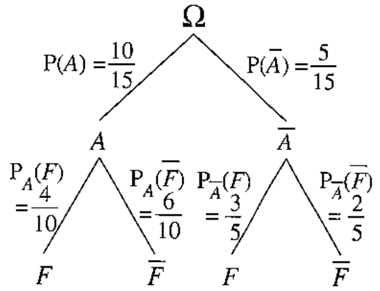
5 En réalité, cet énoncé représente la propriété selon laquelle la probabilité conjointe $P(A1 \cap F1)$ est égale au produit des probabilités $P(A_1) \times P_{A_1}(F_2)$.

ne sont pas encore des **arbres probabilistes**. Pour cela, il faut définir avec précision les différentes probabilités qui interviennent et il faut également donner des règles de construction et d'utilisation de ces arbres qui soient cohérentes avec la théorie des probabilités.

Voici les deux arbres probabilistes qui correspondent à cette situation aléatoire et dont les explications sont au paragraphe suivant :



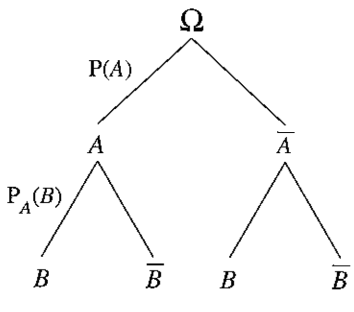
E	$A \cap F$	$\bar{A} \cap F$	$A \cap \bar{F}$	$\bar{A} \cap \bar{F}$
$P(E)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$



E	$A \cap F$	$A \cap \bar{F}$	$\bar{A} \cap F$	$\bar{A} \cap \bar{F}$
$P(E)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Premières règles de construction et d'utilisation dans les cas élémentaires

1 - Un **arbre** se fabrique et se lit de la gauche vers la droite ou du haut vers le bas. L'origine de l'arbre est l'événement certain, l'univers Ω sur lequel est défini une probabilité qui sera notée P.

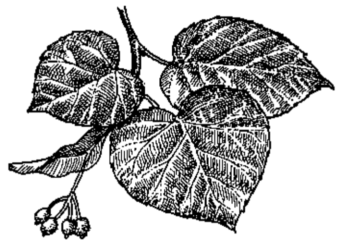


2 - Une **branche** représente un lien probabiliste entre un événement A, considéré comme antécédent, et un événement B considéré comme succédant à A. La probabilité notée sur cette branche est la probabilité de B conditionnée par la réalisation de l'événement A.

Remarquons que cette définition s'applique dès la première branche puisqu'on a :

$$P_{\Omega}(A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A).$$

3 - Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un **chemin**. Au bout d'un chemin se trouve une **feuille**, pas toujours indiquée, qui représente l'événement conjoint des événements rencontrés sur ce chemin et sa probabilité est égale au produit des probabilités notées sur chacune de ses branches.



$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B)} B$$

événement	probabilité
$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

4 - La conjonction, notée $A \cap B$, de deux événements A et B étant commutative, un chemin n'est pas ordonné.

Par exemple, on peut écrire :

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$= P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A)$.

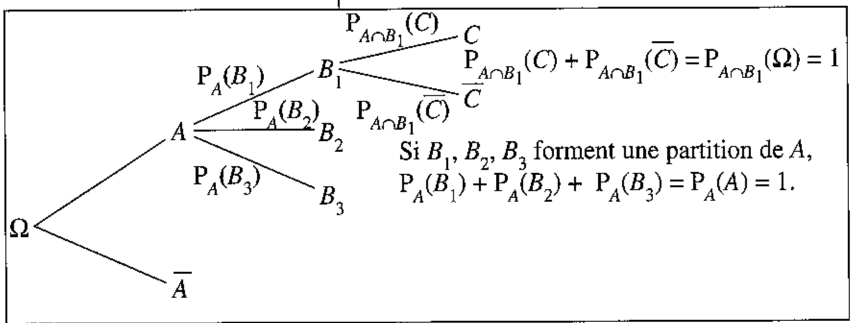
Ainsi, lorsque deux ou plusieurs arbres

traduisent la même situation aléatoire, la probabilité relative à une feuille peut être transférée d'un arbre à l'autre ou aux autres.[6]

Pour illustrer des expériences aléatoires moins élémentaires, on peut ajouter des règles complémentaires comme les suivantes :

Règles complémentaires

5 - Sur un arbre, si les événements succédant à un événement A en forment une partition, alors la somme des probabilités notées sur les branches qui suivent A est égale à 1.



De cet arbre, on peut extraire le chemin qui mène à l'événement feuille :

$$A \cap B_1 \cap C :$$

$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P_A(B_1)} B \xrightarrow{P_{A\cap B_1}(C)} C$$

événem^t E	probabilité P(E)
$A\cap B_1\cap C$	$P(A) \times P_A(B_1) \times P_{A\cap B_1}(C)$

6 - On dit qu'un arbre est **complet** si, pour chacun de ses événements, les événements succédant en forment une partition. Sur un arbre complet, l'ensemble des chemins qui joignent Ω à un événement final représente des événements qui forment une partition de Ω, ainsi, la somme de leurs probabilités vaut 1.

Par exemple, sur l'arbre ci-dessus, lorsque B_1, B_2, B_3 forment une partition de A, on a :

$$P(A\cap B_1\cap C) + P(A\cap B_1\cap \overline{C}) + P(A\cap B_2) + P(A\cap B_3) + P(\overline{A}) = 1$$

Ces dernières règles donnent un aperçu des difficultés qui vont surgir si on veut progresser dans la voie des arbres probabilistes alors que, dans la voie mathématique, les théorèmes probabilistes, comme les définitions, sont rigoureux et décontextualisés, c'est donc vers elle qu'il faut peu à peu se diriger. En ce qui concerne les arbres, il serait donc préférable de s'en tenir aux cas simples et ne pas croire que ceux-ci sont un remède à toutes les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. Comme toute représentation, l'arbre a ses limites et il engendre ou renforce des conceptions réductrices[7], principalement la conception chronologiste. Il existe d'autres représentations, comme les tableaux à double entrée qui, eux aussi, sont une aide efficace à la compréhension de certaines notions en probabilités, mais qui, eux aussi, ont leurs limites et leurs conceptions réductrices.

Exercice d'application

D'après l'exercice commun à tous les candidats du Baccalauréat S, sujet de Nouvelle Calédonie, novembre 1997.

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur. On a constaté que chaque jour entre 11 heures et midi :

a) Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur.

b) Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.

c) Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.

Un client téléphone à l'artisan un jour entre 11 heures et midi.

Si l'on veut aider les élèves à s'approprier cette situation en tant que situation aléatoire, on peut poser la question suivante qui est tout à fait dans l'esprit du programme des classes de Premières : *Indiquer les issues pos-*

[6] La règle 4 est souvent utilisée dans des situations de passage d'un arbre à l'autre encore appelées situations de retournement (ou d'inversion) de l'arbre probabiliste. Elle permet d'illustrer la formule de Bayes.

[7] Voir A. TOTOHASINA dans [9] ou un exercice vécu par J.P.Grangé dans [4].

sibles concernant cette expérience aléatoire.

Pour les correcteurs, il est ensuite préférable d'imposer des notations :
On note P la fonction probabilité associée à cette expérience[8] *et on note :*
• *R l'événement : « le client obtient le répondeur » ;*
• *A l'événement « l'artisan est présent ».*

Pour tout événement X, on note $\overline{X}$ l'événement contraire de X.

L'objectif est de faire trouver aux élèves la probabilité que l'artisan soit présent et on peut s'y prendre de plusieurs façons :

Première façon

celle utilisée par l'auteur de l'énoncé initial :

1°) Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

2°) Exprimer P(R) en fonction de $P_A(R)$, $P_{\overline{A}}(R)$ et P(A).

3°) En déduire l'égalité

$$\frac{4}{5}=\frac{2}{3}P(A)+1$$

et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

Ce cheminement choisi pour obtenir P(*A*) semble prévu pour être résolu sans l'aide de représentations mais principalement en exploitant, grâce à une certaine expérience, les formules de probabilités du programme. Les quelques résultats dont je disposais au moment des corrections montrent que ceci évalue principalement une bonne mémoire et une bonne aptitude au calcul algébrique, mais pas nécessairement une bonne compréhension de la notion de probabilité conditionnelle.

Solution attendue :

1°) D'après l'énoncé, on a :

$$\mathrm{P}(R)=\frac{4}{5}\ ;\ \mathrm{P}_A(R)=\frac{1}{3}\ \text{et}\ \mathrm{P}_{\overline{A}}(R)=1.$$

2°) D'après la formule des probabilités totales :

$\mathrm{P}(R)=\mathrm{P}(R\cap A)+\mathrm{P}(R\cap\overline{A})$ et d'après les probabilités conditionnelles, on obtient :

$\mathrm{P}(R)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}_A(R)+\mathrm{P}(\overline{A})\times\mathrm{P}_{\overline{A}}(R)$

avec $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$.

3°) En utilisant les résultats du 1°), l'égalité précédente devient :

$$\frac{4}{5}=\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{3}+[1-\mathrm{P}(A)]\times 1.$$

D'où on déduit :

$$\frac{4}{5}=-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)+1$$

$$\text{soit } \mathrm{P}(A)=-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{10}$$

A l'aide d'un tableau

1°) Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

2°) On pose P(A) = x, exprimer en fonction de x les probabilités $P(A\cap R)$ et $P(\overline{A}\cap R)$.

3°) En déduire P(A).

Ce cheminement pour obtenir P(*A*) semble prévu pour être résolu avec l'aide d'un tableau car dès qu'on propose au candidat de poser la probabilité marginale P(*A*) = *x*, on lui permet de compléter deux cases intérieures du tableau (voir explication ci-dessous). Puis, en appliquant la formule des probabilités totales, de remplir ce tableau en entier, donc de trouver une relation concernant P(*A*). Dans cette situation, la démarche est très proche de la précédente et elle nécessite aussi plusieurs questions intermédiaires.

[8] Cette précision est indispensable comme on écrit « on note *f* la fonction définie par … ». Sans cette précision, la lettre *P* a tendance à être perçue comme une abréviation du mot probabilité, d'autant plus que l'événement de Ω auquel elle s'applique a lui aussi tendance à être confondu avec l'événement au sens familier.

Solution attendue :

1°) D'après l'énoncé, on a :

$P(R) = \frac{4}{5}$; $P_A(R) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{A}}(R) = 1$.

2°) Si on pose $P(A) = x$, on obtient le tableau suivant où l'on a complété en caractères gras la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ ainsi que les probabilités conjointes :

$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = x \times \frac{1}{3}$$

et $$P(\overline{A} \cap R) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = (1 - x) \times 1 = 1 - x.$$

	A	$\overline{A}$	
R	$\mathbf{\frac{1}{3}\ x}$	$\mathbf{1 - x}$	$\frac{4}{5}$
$\overline{R}$			$\frac{1}{5}$
	x	$\mathbf{1 - x}$	1

3°) D'après les résultats précédents, la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R)$$

devient $\frac{4}{5} = \frac{1}{3}x + 1 - x$

ce qui donne $-\frac{1}{5} = -\frac{2}{3}x$

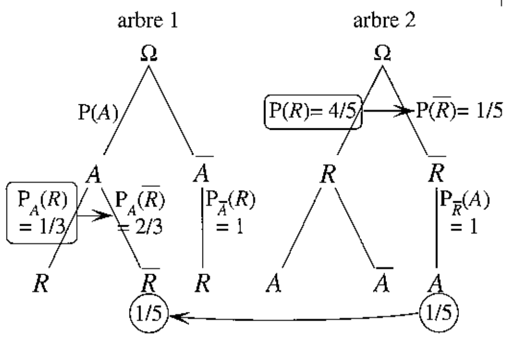
soit $x = \frac{3}{10}$.

A l'aide des arbres

1°) Dessiner deux arbres possibles décrivant cette expérience aléatoire en y faisant figurer les probabilités que l'énoncé permet de connaître, par exemple $P(R) = \frac{4}{5}$.

Ce cheminement, qui impose des arbres pondérés comme outil de résolution, est très directif, mais il est tout à fait dans l'esprit de ce que pourrait être un début d'énoncé de Baccalauréat à partir de la session 1999. La représentation en arbres est tout à fait justifiée ici, car on reconnaît dans l'énoncé des renseignements se traduisant par des probabilités conditionnelles.

Solution attendue :



Le résultat 1/5 obtenu sur le second arbre s'explique par :

$$P(\overline{R} \cap A) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(A) = 1/5$$

D'où la réponse, grâce au premier arbre, en expliquant :

$P(\overline{R} \cap A) \quad = 1/5$

$P(A) \times P_A(\overline{R}) = 1/5$

$P(A) \times 2/3 \quad = 1/5$

$P(A) \quad = 1/5 \times 3/2 = 3/10.$

Regardons un peu, comment ces trois approches de la probabilité sont à l'origine de ces différents cheminements.

Explications

La formalisation est, comme dans tout domaine mathématique, la finalité de cet enseignement des probabilités conditionnelles mais elle n'est peut-être pas le moyen le mieux adapté pour son apprentissage. Elle correspond exactement à la définition telle qu'elle est imposée par les programmes :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est une définition d'essence ensembliste, elle rassure car elle fait penser à un quotient et rappelle, à tort, la formule de Laplace dans le cas d'équiprobabilité $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$. Elle se heurte très vite au vide de connaissances en théorie des ensembles des élèves actuels auxquels on fait croire que $A = (A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})$ est une évidence, que l'on justifie parfois comme on peut à partir de la situation concrète de l'énoncé. Il en est de même pour $(A\cup B)\cap B = B$, et que dire des lois de Morgan telles que $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ pour lesquelles le retour au diagramme de Venn est le seul recours de l'enseignant, mais est-il apte à convaincre les élèves ?

Le tableau est une représentation assez fréquemment choisie par les enseignants parce que c'est un peu Venn ou plus exactement Karnaugh dans la théorie des ensembles et qu'on le rencontre dans différentes parties des mathématiques comme diagramme de Veitch en algèbre de Boole et comme tableau de contingence et diagramme de Carroll en statistiques et probabilité. Ce dernier diagramme est fondé sur la formule des probabilités totales[10] :

$P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B}) = P(A)$, formule additive, donc très simple d'approche pour les élèves. Elle correspond à la compréhension suivante de la probabilité conditionnelle :

$P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)}$ qui se traduit dans le cas où il y a équiprobabilité

par $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(A\cap B) + \text{card}(\overline{A}\cap B)}$

Son avantage est de ne pas être séquentiel, c'est-à-dire de ne pas induire de chronologie entre certains événements et ses inconvénients majeurs sont :

1°) Il renforce la conception cardinaliste par le calcul systématique d'une probabilité par une fraction.

2°) On ne peut y faire figurer d'une manière simple et pratique des probabilités conditionnelles, ce qui est particulièrement gênant lorsqu'on veut faire comprendre et utiliser cette notion.

L'arbre probabiliste est la représentation la mieux adaptée pour exploiter des probabilités conditionnelles car dans des situations aléatoires chronologistes ou causalistes, il retrace la succession des événements comme ils sont décrits dans l'énoncé. L'arbre correspond davantage à l'écriture suivante qui donne la probabilité conjointe :

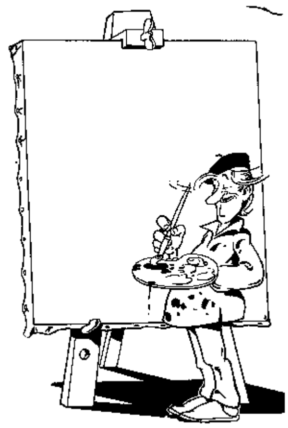
$P(A\cap B) = P(B) \times P_B(A)$ où la probabilité conditionnelle $P_B(A)$ apparaît comme coefficient multiplicateur inférieur à 1, donc réducteur, ce qui est logique puisqu'elle intervient pour calculer la probabilité de $A\cap B$ qui est une partie de B. Il convient également aux situations ensemblistes grâce auxquelles on comprend très bien l'existence de plusieurs arbres pour une même situation aléatoire. Son inconvénient est que, dans des situations chronologistes ou causalistes, il empêche justement de concevoir le second arbre. Ceci correspond à la difficulté épistémologique que rencontrent certains élèves lorsqu'on leur pose la question de déterminer la probabilité d'une cause ayant observé un événement ultérieur.

L'exemple précédent montre comment notre approche personnelle des probabilités influence le questionnement qu'on propose, oriente vers la représentation éventuellement attendue et donc impose la démarche vers la solution.

Conclusion

Pour résoudre un exercice de probabilité, il y a en général une des trois approches décrites précédemment qui est mieux appropriée que les deux autres. L'enseignant doit donc surmonter sa propre approche, qui est souvent inconsciente, pour proposer à ses élèves des exercices où interviennent équitablement ces différentes façons. C'est lorsqu'on a dépassé les différentes façons de concevoir la probabilité qu'on est arrivé au concept mathématique de la probabilité.

[10] La formule des probabilités totales pour un système complet d'événements n'est plus au programme officiel des classes Terminales S depuis 98, mais dans le cas particulier de deux événements et de leurs complémentaires, il semble improbable de s'en passer car c'est la justification des tableaux qui disparaît.



L'enseignant doit donc surmonter sa propre approche, qui est souvent inconsciente,...

L'enseignant doit principalement garder présent à l'esprit que toutes les représentations, aussi pertinentes et formatrices soient-elles, doivent être passsagères pour peu à peu ***laisser place à l'écriture formelle des calculs probabilistes*** *...*

Si on choisit une représentation congrue avec un énoncé, la solution sera plus simple et ne nécessitera pas une résolution comportant des inconnues ou des questions intermédiaires. Parmi ces représentations, les **arbres probabilistes** sont des supports très pertinents pour organiser des données, s'approprier certains énoncés et élaborer les raisonnements à mettre en œuvre, **en particulier en probabilités conditionnelles**. Ils fournissent une aide très efficace à la compréhension des concepts et à l'assimilation des théorèmes ou formules de probabilités.

B. PARZYSZ dans [8] et dans [1] p. 233 à 238, valide l'arbre en tant qu'outil de résolution de problèmes, en explicite des règles de traitement et de conversion, il en indique la portée et les limites. Il ne faudrait certes pas abuser des arbres car des élèves pourraient croire que l'objet de l'apprentissage est le mode d'emploi des arbres, le concept de probabilité conditionnelle ne serait alors pas acquis. Il y aurait évitement de l'obstacle qui ne serait donc pas surmonté comme le signale M. HENRY dans [6].

Il apparaît donc souhaitable que les élèves sachent utiliser d'autres supports visuels comme les **tableaux à double entrée** (diagramme de Carroll) qui ont l'avantage de ne pas être séquentiels. Il semble également souhaitable qu'ils voient l'utilisation des arbres, pondérés ou non, dans d'autres situations, par exemple les dénombrements.

Concernant ces schémas et ces outils en Probabilités, d'importantes questions pédagogiques se posent :

• Notre enseignement peut-il se satisfaire du choix par l'élève de la représentation-outil la mieux adaptée à la situation aléatoire rencontrée ? ou encore ;
• Doit-on enseigner systématiquement ces outils et leurs fonctionnements, et entraîner les élèves à passer de l'un aux autres comme le proposent C. DUPUIS et S. ROUSSET-BERT dans [2] ?

Remarquons que ces questions se posent également en Analyse avec les représentations graphiques et d'autres schémas comme les tableaux de variation.

Il semble que l'enseignant doit principalement garder présent à l'esprit que toutes ces représentations, aussi pertinentes et formatrices soient-elles, doivent être passsagères pour peu à peu **laisser place à l'écriture formelle des calculs probabilistes**, relevant d'une compréhension en profondeur et seule garantie de la validité mathématique des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Commission Inter-IREM « Statistique et Probabilités » : *Enseigner les probabilités au lycée,* juin 1997.

[2] Claire DUPUIS et Suzette ROUSSET-BERT : *Arbres et tableaux de probabilité* in Repères-IREM n° 22, 1996.

[3] Arthur ENGEL : *L'enseignement des probabilités et de la statistique,* (adapté de l'allemand) CEDIC (épuisé), réédité chez ALEAS, 1975.

[4] Jean-Pierre Grangé : *Probabilité conditionnelle et indépendance,* IREM de Besançon, 1996

[5] Jean-Pierre GRANGÉ : *Arbres et probabilités,* IREM de Besançon, Mars 1999.

[6] Michel HENRY : *L'enseignement des probabilités : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*, IREM de Besançon, 1994.

[7] Michel HENRY : *L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré,* in Repères-IREM n° 14, 1994

[8] Bernard PARZYSZ : *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres,* in Repères-IREM n° 10, 1993.

[9] André TOTOHASINA : *Introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence,* in Repères-IREM n° 15, 1994.